自然界の現象（含：数理的な現象）の解析：

- ☞ **現象の本質を取り出したモデルを作り，**
- ☞ **モデルを未知函数に対する方程式の形で表現し，**
- ☞ **方程式を数学的に解析する**

未知函数とその導函数を含んだ方程式：微分方程式

例１：バクテリアの増殖

$n = n(t)$**: バクテリアの個体数**

増殖率＝（Δt **での個体の増加数）/（個体数）/(**Δt**)** $= \dfrac{1}{n}\dfrac{\Delta n}{\Delta t}$

増殖率 $\mu(> 0)$**: 定数**

$$\frac{dn(t)}{dt} = \mu n(t)$$

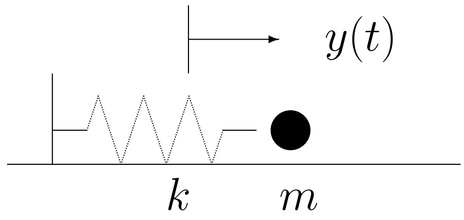
例２：logistic model

もう少し高等な生物は個体数が増えすぎるとストレス→少子化：

少子化の効果の一つのモデル：増殖率＝ $\mu\left(1 - \dfrac{n}{K}\right)$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \mu\left(1 - \frac{n(t)}{K}\right)n(t)$$

例３：調和振動子(Hooke の法則に従うバネにつながれた質点)



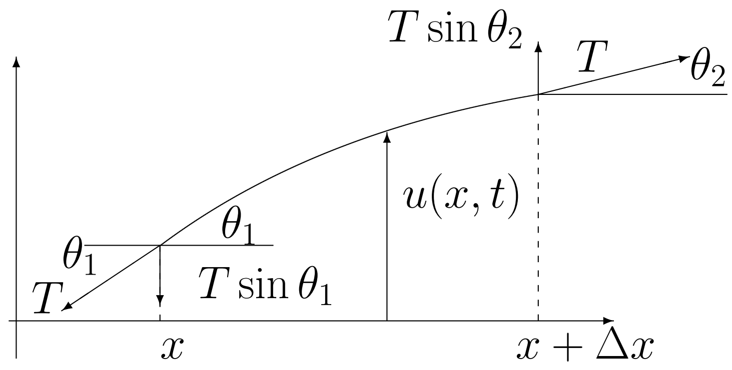
Hooke の法則：力は自然長からの変位に比例する… $-ky(t)$

Newton の運動方程式: (質量)×(加速度)＝(力)

$$m\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -ky(t)$$

例５：波動方程式

張力: T**，ロープの線密度 (単位長当りの質量):** ρ



鉛直方向の力: $T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 \sim T\left(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right)$

※近似： $u_x(x,t) = \tan\theta \sim \sin\theta$

Newton の運動方程式: $\rho\,\Delta x\, u_{tt} = T\left(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

出てきた微分方程式

(1) $\dfrac{dn(t)}{dt} = \mu n(t)$　(2) $\dfrac{dn(t)}{dt} = \mu\left(1 - \dfrac{n(t)}{K}\right) n(t)$

(3) $m\,\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -ky(t)$　(4) $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

✓ **偏微分方程式と常微分方程式**

未知関数が１変数函数→常微分: (1),(2),(3),(4)

多変数函数→偏微分:(5)

難しさの度合い： $\boxed{\text{常微分} \lll \text{偏微分}}$

✓ **線形と非線形**

方程式が未知関数と導関数に関して１次式→「線形」(1),(3),(4)

そうでないもの→「非線形」(2)

難しさの度合い： $\boxed{\text{線形} \lll \text{非線形}}$

✓ **階数:方程式中の導関数の最高階数**

難しさの度合い： $\boxed{\text{低いもの} < \text{高いもの}}$

✓ **微分方程式を「解く」**

方程式を満たす函数：「解」

解を求めること：「微分方程式を解く」

$\boxed{\text{例}}$:

✓ **(1) の解：** $n(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$

✓ **(3) の解：** $y(t) = \sin\omega t,\ y(t) = \cos\omega t,\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

✓ **(4) の解：** $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct),\ f, g$ **は任意函数．**

（後期の「微分積分 B」で多変数函数の微分を学べば簡単にチェックできる）

定数係数線形常微分方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

線形性:

$$y = y_1(x),\ y = y_2(x)\ \text{が解}$$

$$\downarrow$$

それらの線形結合 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ **(**$c_1,\ c_2$ **は任意定数)も解**

なぜなら：

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + p\frac{dy_1}{dx} + qy_1 = 0$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} + p\frac{dy_2}{dx} + qy_2 = 0$$

上 $\times c_1$ **＋下** $\times c_2$**:**

$$\frac{d^2}{dx^2}(c_1y_1 + c_2y_2) + p\frac{d}{dx}(c_1y_1 + c_2y_2) + q(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

例 **(3):** $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$y = \cos\omega t,\ \sin\omega t$ **は解** $\longrightarrow$ $\boxed{y = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t}$ **も解：『一般解』**

✔ $t = 0$ **でバネを** y_0 **だけ引っ張って静かに離したときの運動は？：**

$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0: \quad \text{『初期条件』}$$

$$y(0) = c_1 = y_0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = c_2\omega = 0 \to c_2 = 0.$$

$\longrightarrow$ $\boxed{y(t) = y_0\cos\omega t}$: **振幅** y_0**, 周期** $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ **の振動（高校物理）**

線形常微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

☛ **何らかの方法で解が** n **個わかれば，その線形結合も解となっている．**

☛ **さらに，そのようにして作られた解が全てを尽くしていることが示される．**

☛ **特に定数係数であれば，** $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ を仮定して，

$$\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \\ \to \quad & \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad \text{解：} \lambda_1, \ldots, \lambda_n \\ \to \quad & y = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

ただし λ_i **が複素数なら Euler の公式** $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$ **で解釈**

> **ところが，悲しいことに：**
>
> **素朴な意味で「解ける」常微分方程式はたったこれだけ．**

✓ **１階線形常微分方程式**

✓ **定数係数線形常微分方程式**

✓ **例外的に初等的に解ける場合（「…型方程式」「…の方程式」などと名前がついていることが多い）**

例 **「パンルヴェI型方程式」**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6y^2 + x$$

解は初等函数や線形方程式の解（特殊函数など）の有限個の組合わせでは表示できない．ただし右辺第２項が定数であれば，解は「楕円函数」という特殊函数で与えられる．

微分方程式の世界を知る

$\downarrow$

初等函数の組合わせだけで何とかなる世界がすぐ終わる

$\downarrow$

函数の具体形を知らずに情報を引き出す術が必要：「理論」

$\downarrow$

高校数学の世界とバイバイ…

例 $\dfrac{dy}{dx} = xy$ **をベキ級数の形で解く**

$$
\begin{aligned}
y &= x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^\lambda + c_1 x^{\lambda+1} + c_2 x^{\lambda+2} + \cdots, \\
xy &= c_0 x^{\lambda+1} + c_1 x^{\lambda+2} + c_2 x^{\lambda+3} + \cdots, \\
y' &= \lambda c_0 x^{\lambda-1} + (\lambda+1) c_1 x^\lambda + (\lambda+2) c_2 x^{\lambda+1} + \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \quad \lambda = 0, \quad c_1 = 0, \quad n c_n - c_{n-2} = 0 \ (n > 1) \\
&\rightarrow \quad c_{2n} = \frac{c_0}{2n \cdot (2n-2) \cdots 2} = \frac{c_0}{2^n n!}, \quad c_{2n+1} = 0 \\
&\rightarrow \quad y = c_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2^n n!} + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

ベキ級数の形でしかわからない函数が出てくる

果たしてこの函数は意味を持つのか？理論が必要！

- ☛ **この無限級数は果たして収束するのか？どのような x に対して収束するのか？**
- ☛ **収束先の函数は連続函数か？微分可能か？素朴な級数の計算，例えば微分・積分，四則演算などは許されるのか？**

理論もうまくいかなければ：コンピュータで数値的に解く

$\boxed{\text{例}}$: **Logistic 方程式**

$$\frac{dn}{dt} = a(1-n)n$$

コンピュータの話の前に手で解いてみる：

解法のポイント：従属変数の変換で簡単な微分方程式に変換する

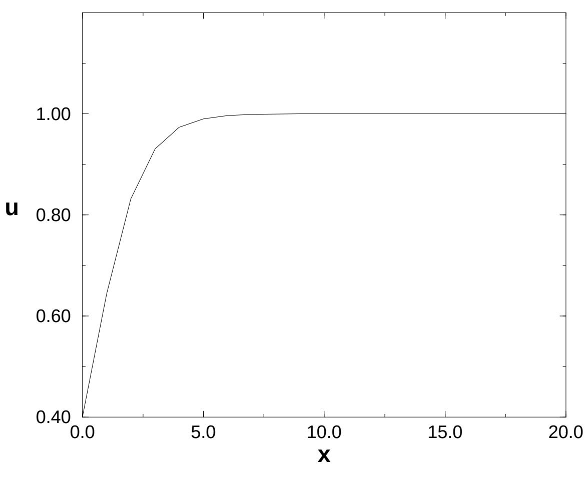
$$\frac{1}{n^2}\frac{dn}{dt} = a\left(\frac{1}{n}-1\right) \longrightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{n}-1\right)}_{=f(t)} = a\underbrace{\left(\frac{1}{n}-1\right)}_{=f(t)}$$

$$\Big\downarrow \frac{1}{n}-1=f$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = -at} \rightarrow f = c\mathrm{e}^{-at}$$

$$\Big\downarrow n = \frac{1}{1+f}$$

$$\boxed{n(t) = \frac{1}{1+c\mathrm{e}^{-at}}}$$



Logistic **方程式をコンピュータに解かせたい：**

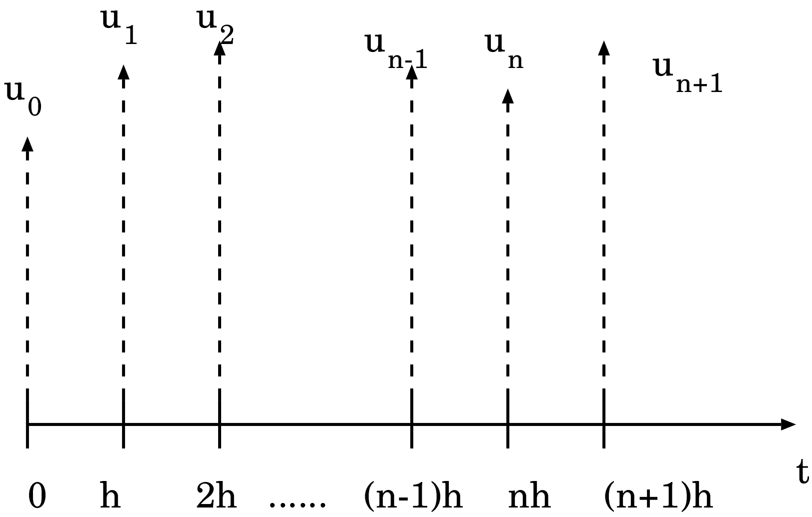
$$\frac{du}{dt} = a(1-u)u$$

- ☛ **コンピュータは連続量を扱えない**
- ☛ **コンピュータは極限の概念（微分・積分）を知らない**

$$\downarrow$$

何らかの意味で「離散化」が必要！

$$u(t) = u(nh) = u_n, \quad n \in \mathbf{Z}$$



✔ **微分をどうするか：**

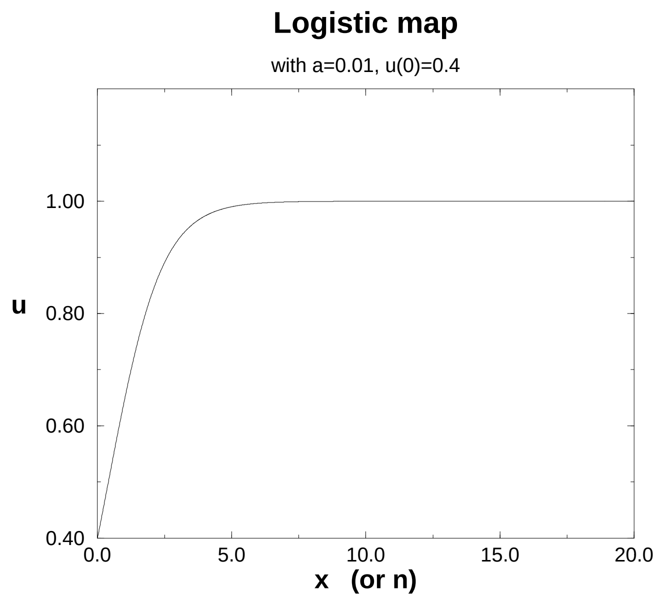
$$\frac{du}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h} \sim \frac{u(t+h)-u(t)}{h} \quad \textbf{前進(Euler)差分}$$

Logistic Map:

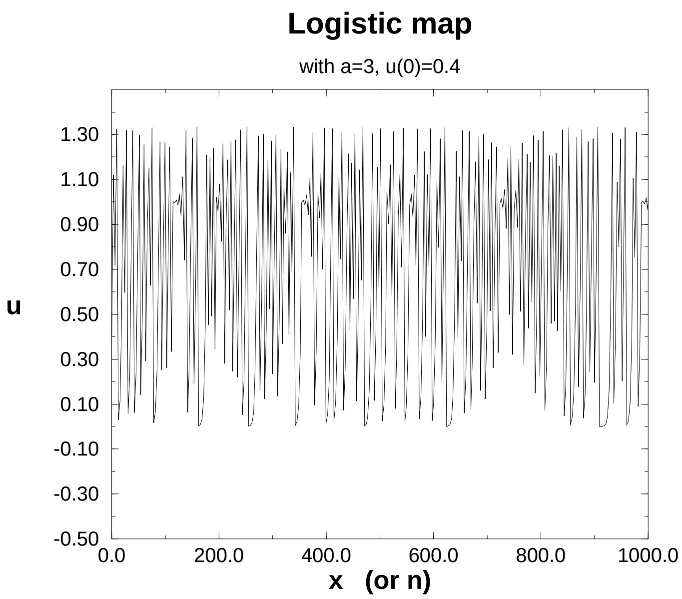
$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = a(1-u_n)u_n$$

$$u_{n+1} = ah(1-u_n)+u_n$$

ah **が小さいときはよいが…**



ah **が大きくなると…**

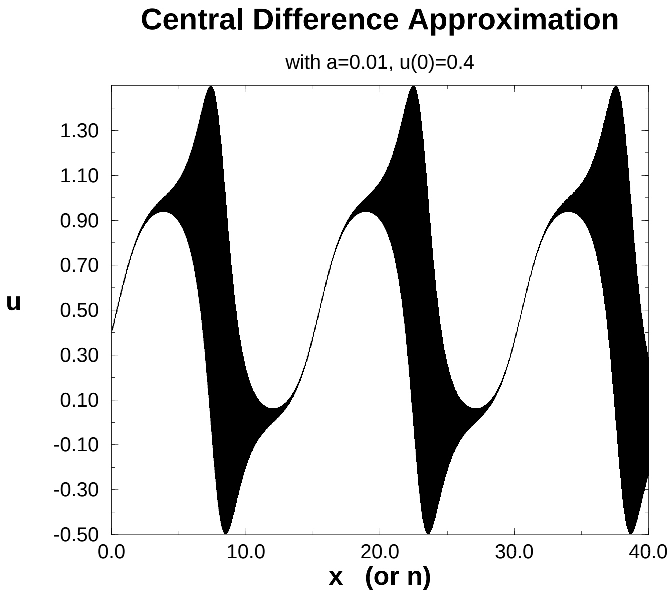


✔ 微分の近似の方法を変えてみる：

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t-h)}{2h} \sim \frac{u(t+h)-u(t-h)}{2h}$$ **中心差分**

$$\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} = a(1-u_n)u_n$$

$$u_{n+1} = 2ah(1-u_n)+u_{n-1}$$



a がどんなに小さくてもこの現象は起こる！

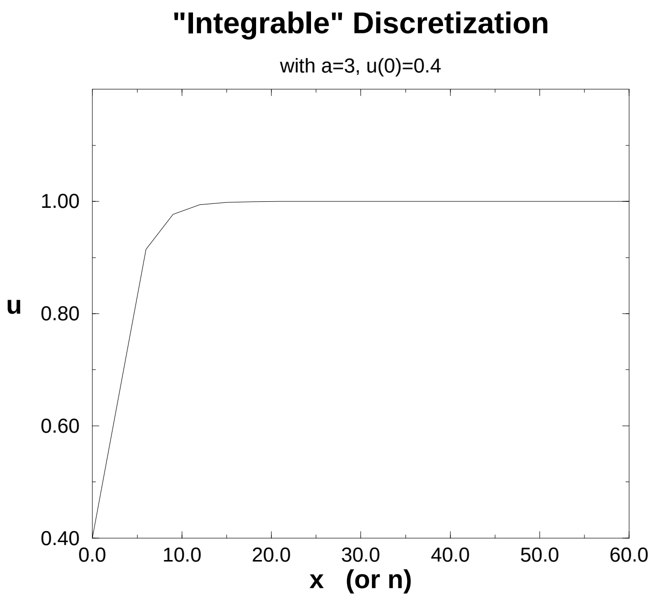
このような現象が起こったときにどう対処するか：

- ✓ この現象は微分方程式では見られなかった離散系特有の新しい現象である．この現象そのものを追求しよう．→「カオス」「複雑系」「複素力学系」
- ✓ この現象は微分方程式では見られなかった困った現象である．このようなことが起こらないように工夫しよう．→「数値解析」「可積分系」

✔ **ちょっと工夫する：**

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = ah(1-\boxed{u_{n+1}})u_n$$

ah **をいくら大きくしても大丈夫：**



問

1. **上の差分方程式を整理して** u_{n+1} **を** u_n **で表す式に変形せよ．**
2. **両辺の逆数を取って，**$1/u_n$ **に関して書き直すと高校２年で解ける漸化式になる．それを解いて** u_n **を** u_0 **と** n **で表せ．**
3. $u_n = u(nh)$ **であることに注意して，**$h \to 0$ **の極限を取れ．すなわち，**$nh = t$ **（**t **は一定）として** $h \to 0$ **の極限を取り，それが logistic 方程式の解に帰着することを示せ．ただし，指数函数の定義**

$$\mathrm{e}^t = \lim_{h\to 0}(1+h)^{t/h}$$

を使ってよい．

タネ明かし

$$u' = a(1-u)u \implies f = \frac{1}{u} - 1 \implies \boxed{f' = -af}$$ **:ここで離散化**

$$f' = -af \longrightarrow \frac{f_n - f_{n-1}}{h} = -af_n$$ **「後退差分」**

$$\downarrow$$

$$f_n = (1+ah)^{-1} f_{n-1} \longrightarrow f_n = c(1+ah)^{-n}$$

$$\downarrow$$

$$f_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{1+ah}\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = ah(1 - \boxed{u_{n+1}})u_n$$

その方程式が持っている数理的構造をうまく保存するようにするとうまくいく！

✍ **もちろん，どんな方程式に対してもこういうことができるわけではない．非常によい構造を背後に持っている微分方程式のファミリー「可積分系」に対しては大変うまくいき，応用も広い（幾何学など）．**

✍ **どんな方程式に対してもある程度の精度と安定性を保証する計算法の研究：「数値解析」**

１年生諸君にちょっとだけアドバイス

☛ 「自分探し」をちゃんとやろう．
数学でも「自分探し」は必要．いや数学にこそ自我の奥底の個性が強く反映されるから．何がどうなったら自分は「わかった」と思うのか．どんなものが自分にとって気持ちよくアタマに入ってくるのか．いろいろな本をいっぱい読みなさい．軽く流したり深く読んだり…．

☛ 数学以外のことにもたくさん触れよう．
いろいろな人と交流したりいろいろな学問の本を読んだり．できれば物理学（力学・電磁気学・量子力学）には何らかの形で触れて欲しい．

☛ わからないという状態を楽しもう！
数学の勉強をして最初からよくわかるということはまずない．焦らず，自分にしっくりくるまで気長に心のどこかに飼っておこう．そういう不安定さを楽しみながらあーでもないこーでもないと考えよう．

☛ いっぱい背伸びをしよう．
「わかる」必要などないので思いきってムツカシく見えることにも付き合ってみよう！これが一番自分の財産になる．

☛ いろいろな人の言うことをよ〜く聞こう．そして自分でよ〜く考えよう．

☛ <u>センセイの言うことは信じてはいけない！</u>