可積分系の厳密解と Gram 行列式

太田 泰広

（神戸大学大学院 理学研究科）

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

九州大学 伊都キャンパス

２０１４年2月２２～２３日

可積分系の解 $\longrightarrow$ Casorati 行列式

$$\left\{\begin{array}{l}\text{戸田格子（１次元，２次元）}\\ \text{sinh-Gordon}\\ \text{sine-Gordon}\\ \text{それらの離散化}\quad \text{etc.}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{ソリトン解}\\ \text{分子解}\\ \qquad\qquad \text{etc.}\end{array}\right.$$

双線形方程式＝行列式の恒等式

（Plücker 関係式）

もう一つの行列式表示

Gram 行列式（Gramian）

sine-Gordon と Casorati 行列式解（復習）

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = -4\sin\theta \qquad\qquad \theta = \frac{1}{i}\left(2\log\frac{\tau_1}{\tau_0} - \log\lambda\right)$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} \qquad\qquad \lambda = \prod_{i=1}^{N} p_i^2$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n\, e^{p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}} + (-p_k)^n\, e^{-p_k x + \frac{y}{p_k} + \xi_{k0}}$$

θが実数値をとるためには……

『x, yが実数ならばθが実数』

という条件を満足させたい.

$\Rightarrow$ 行列式解の中のパラメータの特殊化

$$\eta_{k0} = -\xi_{k0} = \frac{\pi}{4} i \qquad\qquad p_k \in \mathbb{R}$$

解に対する付加条件をどうやって満足させるか.

Gram 行列式を利用する.

Gram 行列式とは

$$
\begin{vmatrix}
(\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_N) \\
(\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_2, \varphi_N) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\varphi_N, \varphi_1) & (\varphi_N, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_N, \varphi_N)
\end{vmatrix}
$$

(φ_i, φ_j) は φ_i と φ_j の内積

例

$$
(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}dx
$$

（可積分系の文脈での）Gram 行列式

$$\tau(x, y, \cdots) = \det_{1 \le i,j \le N} \left(c_{ij} + \int^{x} \varphi_i(x', y, \cdots)\psi_j(x', y, \cdots) dx' \right)$$

c_{ij}：積分定数

φ_i, ψ_j　は線形微／差分方程式をみたす

Casorati（復習）

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

は 2 次元戸田格子方程式（双線形形式）

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

をみたす．ただし

$$\frac{\partial}{\partial x} f_n^{(k)} = f_{n+1}^{(k)} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_n^{(k)} = -f_{n-1}^{(k)}$$

$m_{ij} = c_{ij} + \int^x \varphi_i(x)\psi_j(x)dx$ に対し，$\boxed{\dfrac{\partial m_{ij}}{\partial x} = \varphi_i \psi_j}$

φ_i, ψ_j が

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi_i = -\varphi_i \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\psi_j = -\psi_j$$

をみたすなら

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ij}}{\partial y} &= \int^x \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\psi_j + \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right) dx \\ &= -\int^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial m_{ij}}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}}$$

φ_i, ψ_j が

$$\partial_x \varphi_i(n) = \varphi_i(n+1) \qquad \partial_x \psi_j(n) = -\psi_j(n-1)$$

をみたすなら

$$m_{ij}(n+1) - m_{ij}(n) = \int^x \big(\varphi_i(n+1)\psi_j(n+1) - \varphi_i(n)\psi_j(n)\big)\, dx$$

$$= \int^x \Big\{\big(\partial_x \varphi_i(n)\big)\psi_j(n+1) + \varphi_i(n)\partial_x \psi_j(n+1)\Big\}\, dx$$

$$= \int^x \partial_x \big(\varphi_i(n)\psi_j(n+1)\big) dx$$

$$\boxed{m_{ij}(n+1) = m_{ij}(n) + \varphi_i(n)\psi_j(n+1)}$$

Gram

$$\tau_n = \begin{vmatrix} m_{11}^n & m_{12}^n & \cdots & m_{1N}^n \\ m_{21}^n & m_{22}^n & \cdots & m_{2N}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^n & m_{N2}^n & \cdots & m_{NN}^n \end{vmatrix}$$

は 2 次元戸田格子方程式（双線形形式）

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

をみたす．ただし

$$\partial_x m_{ij}^n = \varphi_i^n \psi_j^n$$

$$\partial_y m_{ij}^n = -(\partial_y \varphi_i^n)(\partial_y \psi_j^n)$$

$$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^n + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$$

$$\partial_x \partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^n \qquad \partial_x \partial_y \psi_i^n = -\psi_i^n$$

$$\partial_x \varphi_i^n = \varphi_i^{n+1} \qquad \partial_x \psi_j^n = -\psi_j^{n-1}$$

$$\left(\partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^{n-1} \qquad \partial_y \psi_j^n = \psi_j^{n+1}\right)$$

定理

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{に対して}$$

$$\partial_x |A| = \sum_{j=1}^{N} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \partial_x a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & \partial_x a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

Casorati (Wronskian) の微分

$$\tau = \det(f_j^{(i)})_{N\times N} = |0, 1, \cdots, N-1| \qquad \partial_x f_j^{(i)} = f_{j+1}^{(i)}$$

に対して

$$\partial_x \tau = |0, 1, \cdots, N-2, N|$$

定理

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$\Delta_{ij} =$（A の (i,j) 余因子）

に対して

$$\partial_x |A| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, \partial_x a_{ij}$$

証明

$$\partial_x |A| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}}}_{\substack{\parallel \\ \Delta_{ij}}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$$

<u>定理</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & b_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, b_i c_j$$

ただし

$$\Delta_{ij} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \text{の}\,(i,j)\,\text{余因子} \right)$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \widehat{j} \\ \vee \end{array} & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} & < \ \widehat{i} \end{array}$$

Gramian の微分

$$\tau = \det(m_{ij})_{N\times N} \qquad \partial_x m_{ij} = \varphi_i \psi_j$$

に対して

$$\partial_x \tau = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} & \varphi_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN} & \varphi_N \\ -\psi_1 & \cdots & -\psi_N & 0 \end{vmatrix}$$

証明

$$\begin{aligned} \partial_x \tau &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, \partial_x m_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta_{ij}\, \varphi_i \psi_j \\ &= \begin{vmatrix} m_{ij} & \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\partial_x m_{ij} = \varphi_i \psi_j \qquad \partial_y m_{ij} = -(\partial_y \varphi_i)(\partial_y \psi_j)$$

のとき

$$\partial_x \left| m_{ij} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix} \qquad \partial_y \left| m_{ij} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

さらに，$\partial_x \partial_y \varphi_i = -\varphi_i$， $\partial_x \partial_y \psi_j = -\psi_j$ のとき

$$\partial_x \partial_y \left| m_{ij} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & -1 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} - \left| m_{ij} \right|$$

$$\because \;\; \partial_x\partial_y \left| m_{ij} \right| = \partial_x \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y\varphi_i \\ \partial_y\psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{\Delta}_{ij}\, \partial_x\Big((i,j)\text{成分}\Big)$$

$$\widetilde{\Delta}_{ij}\text{は}(N+1)\times(N+1)\text{行列の余因子}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Delta}_{ij}\, \underbrace{\partial_x m_{ij}}_{\substack{\parallel \\ \varphi_i\psi_j}} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\Delta}_{i,N+1}\, \underbrace{\partial_x\partial_y\varphi_i}_{\substack{\parallel \\ -\,\varphi_i}} + \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Delta}_{N+1,j}\, \underbrace{\partial_x\partial_y\psi_j}_{\substack{\parallel \\ -\,\psi_j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Delta}_{ij} \underbrace{\partial_x m_{ij}}_{\substack{\parallel \\ \varphi_i \psi_j}} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\Delta}_{i,N+1} \underbrace{\partial_x \partial_y \varphi_i}_{\substack{\parallel \\ -\,\varphi_i}} + \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Delta}_{N+1,j} \underbrace{\partial_x \partial_y \psi_j}_{\substack{\parallel \\ -\,\psi_j}}$$

$\widetilde{\Delta}_{ij}$ は $(N+1) \times (N+1)$ 行列 $\begin{pmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{pmatrix}$ の余因子

$$= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & 0 \\ -\psi_j & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & -\varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & 0 \\ -\psi_j & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & -\varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ -\psi_j & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & 0 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i \\ -\psi_j & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{ij} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} m_{ij} & \partial_y \varphi_i & \varphi_i \\ \partial_y \psi_j & 0 & -1 \\ -\psi_j & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{ij} \end{vmatrix}
$$

$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^{n} + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$　のとき

$$\begin{vmatrix} m_{11}^{n+1} & \cdots & m_{1N}^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^{n+1} & \cdots & m_{NN}^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}^{n} + \varphi_1^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{1N}^{n} + \varphi_1^n \psi_N^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^{n} + \varphi_N^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{NN}^{n} + \varphi_N^n \psi_N^{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_{11}^{n} + \varphi_1^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{1N}^{n} + \varphi_1^n \psi_N^{n+1} & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1}^{n} + \varphi_N^n \psi_1^{n+1} & \cdots & m_{NN}^{n} + \varphi_N^n \psi_N^{n+1} & \varphi_N^n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}^{n} & \cdots & m_{1N}^{n} & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{N1}^{n} & \cdots & m_{NN}^{n} & \varphi_N^n \\ -\psi_1^{n+1} & \cdots & -\psi_N^{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

また，$m_{ij}^{n-1} = m_{ij}^{n} - \varphi_i^{n-1} \psi_j^n$　なので

$$\left| m_{ij}^{n-1} \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^{n} & \varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^n & 1 \end{vmatrix}$$

（まとめ）

$$\partial_x m_{ij}^n = \varphi_i^n \psi_j^n \qquad \partial_y m_{ij}^n = -(\partial_y \varphi_i^n)(\partial_y \psi_j^n)$$

$$m_{ij}^{n+1} = m_{ij}^n + \varphi_i^n \psi_j^{n+1}$$

$$\partial_x \varphi_i^n = \varphi_i^{n+1} \qquad \partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^{n-1}$$

$$\partial_x \psi_j^n = -\psi_j^{n-1} \qquad \partial_y \psi_j^n = \psi_j^{n+1}$$

のとき

$$\partial_x \left| m_{ij}^n \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ -\psi_j^n & 0 \end{vmatrix} \qquad \partial_y \left| m_{ij}^n \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \partial_y \varphi_i^n \\ \partial_y \psi_j^n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\partial_x \partial_y + 1) \left| m_{ij}^n \right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \partial_y \varphi_i^n & \varphi_i^n \\ \partial_y \psi_j^n & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left|m_{ij}^{n+1}\right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^{n} & \varphi_i^{n} \\ -\psi_j^{n+1} & 1 \end{vmatrix} \qquad \left|m_{ij}^{n-1}\right| = \begin{vmatrix} m_{ij}^{n} & \varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n} & 1 \end{vmatrix}$$

定理（分子解の講義の復習）

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} & a_{1,N+2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} & a_{N,N+2} \\
a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} & a_{N+1,N+2} \\
a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} & a_{N+2,N+2}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1N} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{N1} & \cdots & a_{NN}
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} \\
a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
 & // & & a_{1,N+2} \\
 & & & \vdots \\
 & & & a_{N,N+2} \\
a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+2}
\end{vmatrix}
$$

$$
-
\begin{vmatrix}
 & // & & a_{1,N+2} \\
 & & & \vdots \\
 & & & a_{N,N+2} \\
a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+2}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
 & // & & a_{1,N+1} \\
 & & & \vdots \\
 & & & a_{N,N+1} \\
a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1}
\end{vmatrix}
$$

<u>証明</u>

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+1} & a_{1,N+2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+1} & a_{N,N+2} \\
a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} & a_{N+1,N+2} \\
a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+1} & a_{N+2,N+2}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1N} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{N1} & \cdots & a_{NN}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{N+2} a_{i,N+2}\,\Delta_{i,N+2} \left| a_{ij} \right|_{N\times N} \qquad \left(\begin{array}{l} \Delta_{ij}\,\text{は}\,(N+2)\times(N+2) \\ \text{行列の余因子} \end{array} \right)
$$

$$
= \sum_{i=1}^{N+2} a_{i,N+2}\,\Delta_{i,N+2} \left| a_{ij} \right|_{N\times N}
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N+2} a_{ij}\,\Delta_{i,N+2} \right) (-1)^{j+N-1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} & \overset{\widehat{j}}{\vee} & & \end{array} \\
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$= \sum_{i=1}^{N+2} a_{i,N+2}\,\Delta_{i,N+2}\,\Big|a_{ij}\Big|_{N\times N}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N+2} a_{ij}\,\Delta_{i,N+2}\right)(-1)^{j+N-1}\begin{array}{c} \qquad\overset{\widehat{j}}{\vee} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+2} \Delta_{i,N+2}\left(\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j+N-1}a_{ij}\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \end{vmatrix} \\ \qquad\widehat{j} \end{array} + a_{i,N+2}\Big|a_{ij}\Big|_{N\times N}\right)$$

$$
= \sum_{i=1}^{N+2} \Delta_{i,N+2} \left(\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+N-1} a_{ij} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \end{vmatrix} \\ \qquad\quad \widehat{j} \qquad\qquad\qquad \end{array} + a_{i,N+2} \Big| a_{ij} \Big|_{N \times N} \right)
$$

$$
= \sum_{i=1}^{N+2} \Delta_{i,N+2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \\ a_{i1} & \cdots & a_{iN} & a_{i,N+2} \end{vmatrix}
$$

$$
= \Delta_{N+2,N+2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} & a_{1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} & a_{N,N+2} \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,N} & a_{N+2,N+2} \end{vmatrix} + \Delta_{N+1,N+2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,N+2} \\ a_{N+1,j} & a_{N+1,N+2} \end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & 0 & -1 \\ -\psi_j^n & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_{ij}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ \psi_j^{n+1} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ -\psi_j^n & 0 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} m_{ij}^n & \varphi_i^n \\ \psi_j^{n+1} & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_{ij}^n & -\varphi_i^{n-1} \\ -\psi_j^n & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\partial_x \partial_y + 1)\tau_n \times \tau_n = \partial_y \tau_n \times \partial_x \tau_n - (-\tau_{n+1})\tau_{n-1}$$
$$\tau_n := \begin{vmatrix} m_{ij}^n \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

1. Gram 行列式の微分則，差分則

微分やシフトが縁つき Gram 行列式
で書ける.

2. 行列式の恒等式

$\Longrightarrow$ 双線形方程式

$\boxed{N\text{-soliton 解}}$

$$\tau_n = \det\left(m_{ij}^n\right)_{N\times N} = \det\left(c_{ij} + \int^x \varphi_i^n \psi_j^n dx\right)_{N\times N}$$

において

$$c_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\varphi_i^n = \alpha_i\, p_i^n\, e^{p_i x - \frac{1}{p_i} y}$$

$$\psi_j^n = \beta_j\, (-q_j)^{-n}\, e^{q_j x - \frac{1}{q_j} y}$$

ととる．このとき， $m_{ij}^n = \delta_{ij} + \dfrac{1}{p_i + q_j}\, \varphi_i^n \psi_j^n$

$$
\tau_n = \begin{vmatrix}
1 + \dfrac{\varphi_1\psi_1}{p_1 + q_1} & \dfrac{\varphi_1\psi_2}{p_1 + q_2} & \cdots & \dfrac{\varphi_1\psi_N}{p_1 + q_N} \\
\dfrac{\varphi_2\psi_1}{p_2 + q_1} & 1 + \dfrac{\varphi_2\psi_2}{p_2 + q_2} & \cdots & \dfrac{\varphi_2\psi_N}{p_2 + q_N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\varphi_N\psi_1}{p_N + q_1} & \dfrac{\varphi_N\psi_2}{p_N + q_2} & \cdots & 1 + \dfrac{\varphi_N\psi_N}{p_N + q_N}
\end{vmatrix}
$$

Fredholm 行列式

$$A = \Big(a_{ij}\Big)_{N\times N} \qquad I = \Big(\delta_{ij}\Big)_{N\times N}$$ として

$$\begin{aligned}
F &= \det\Big(I + A\Big) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \sum_{1\le i<j\le N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \\
&\quad + \sum_{1\le i<j<k\le N} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tau_n \; &= 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i \psi_i}{p_i + q_i} + \sum_{1 \le i < j \le N} \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_i \psi_i}{p_i + q_i} & \dfrac{\varphi_i \psi_j}{p_i + q_j} \\ \dfrac{\varphi_j \psi_i}{p_j + q_i} & \dfrac{\varphi_j \psi_j}{p_j + q_j} \end{vmatrix} + \cdots \\
&\qquad \cdots + \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_1 \psi_1}{p_1 + q_1} & \cdots & \dfrac{\varphi_1 \psi_N}{p_1 + q_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\varphi_N \psi_1}{p_N + q_1} & \cdots & \dfrac{\varphi_N \psi_N}{p_N + q_N} \end{vmatrix} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i + q_i} \varphi_i \psi_i + \sum_{1 \le i < j \le N} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p_i + q_i} & \dfrac{1}{p_i + q_j} \\ \dfrac{1}{p_j + q_i} & \dfrac{1}{p_j + q_j} \end{vmatrix} \varphi_i \varphi_j \psi_i \psi_j \\
&\qquad + \cdots + \left| \frac{1}{p_i + q_j} \right|_{N \times N} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_N \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_N
\end{aligned}
$$

簡約　　　解に制限を加えて，方程式をえる．

☆１次元戸田格子

要請：　$\partial_x \tau_n = \partial_y \tau_n$

このとき

$$\frac{1}{2} D_x^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

$$
\begin{aligned}
\tau_n &= \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j}\,\varphi_i\psi_j\right)_{N\times N} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{N}\varphi_i\right)\det\left(\delta_{ij}\frac{1}{\varphi_i} + \frac{\psi_j}{p_i + q_j}\right) = \det\left(\delta_{ij}\frac{\varphi_j}{\varphi_i} + \frac{\varphi_j\psi_j}{p_i + q_j}\right) \\
&= \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j}\,\varphi_j\psi_j\right)
\end{aligned}
$$

$$
\varphi_j\psi_j = \alpha_j\beta_j\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)^n e^{\underline{\underline{(p_j + q_j)x - \left(\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j}\right)y}}}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\boxed{q_j = -\frac{1}{p_j}} \text{ とえらぶと } \left(p_j - \frac{1}{p_j}\right)x + \left(p_j - \frac{1}{p_j}\right)y
$$

$$
\partial_x(\varphi_j\psi_j) = \partial_y(\varphi_j\psi_j) \qquad \therefore\ \ \partial_x\tau_n = \partial_y\tau_n
$$

☆ sinh-Gordon , sine-Gordon

$$\boxed{\text{要請：}\quad \tau_{n+2} = \tau_n}$$

このとき $f = \tau_0$, $g = \tau_1$ に対して

$$\frac{1}{2} D_x D_y \, f \cdot f = g^2 - f^2$$

$$\frac{1}{2} D_x D_y \, g \cdot g = f^2 - g^2$$

$$\tau_n = \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i + q_j}\varphi_j\psi_j\right)$$

$$\varphi_j\psi_j = \alpha_j\beta_j \underline{\underline{\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)^n}} e^{(p_j+q_j)x - \left(\frac{1}{p_j}+\frac{1}{q_j}\right)y}$$

$\boxed{q_j = p_j}$ とえらぶと $(-1)^n$

$$\tau_{n+2} = \tau_n$$

sinh-Gordon ， sine-Gordon 方程式

$$\frac{1}{2}D_xD_y\, f\cdot f = g^2 - f^2 \qquad \frac{1}{2}D_xD_y\, g\cdot g = f^2 - g^2$$

$$(\log f)_{xy} = \frac{D_xD_y\, f\cdot f}{2f^2}$$ より

$$(\log f)_{xy} = \left(\frac{g}{f}\right)^2 - 1 \qquad (\log g)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - 1$$

$$\therefore\ \left(\log\frac{g}{f}\right)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - \left(\frac{g}{f}\right)^2$$

$$\left(\log\frac{g}{f}\right)_{xy} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 - \left(\frac{g}{f}\right)^2$$

$v = 2\log\dfrac{g}{f}$ に対して,

$$v_{xy} = 2(e^{-v} - e^{v}) = -4\sinh v \qquad \text{(sinh-Gordon)}$$

$\theta = \dfrac{v}{i} = \dfrac{2}{i}\log\dfrac{g}{f}$ に対して,

$$\theta_{xy} = -4\sin\theta \qquad \text{(sine-Gordon)}$$

複素数なら同じ方程式．実数に制限すると別の方程式

> 方程式として区別すべきものはどれだけあるか

$x, y \in \mathbb{R}$ のとき　　　双曲型

$$\partial_x \partial_y \theta = -4\sin\theta$$

または　$t = x + y$, $s = x - y$　によって

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2)\theta = -4\sin\theta$$

$x \in \mathbb{C},\ \ y = \overline{x}$　のとき　　　楕円型

$$X = x + y = x + \overline{x} \quad , \quad Y = \frac{x - y}{i} = \frac{x - \overline{x}}{i}$$

によって

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\theta = -4\sin\theta$$

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\,\theta = \underline{\underline{-}}4\sin\theta$$

$$\uparrow$$

X, Y のスケーリングでは符号を
かえられない

$\theta \ \longrightarrow \ \theta + \pi$ で符号反転

境界条件の話と関係

境界条件について

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\,\theta = -4\sin\theta$$

$X \to \pm\infty$ のとき $\theta \to$ 定数　とすると

その定数は　$n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

たとえば

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\theta = -4\sin\theta \qquad\qquad \theta \longrightarrow 2n\pi \quad (X \to -\infty)$$

と

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\theta = +4\sin\theta \qquad\qquad \theta \longrightarrow 2n\pi \quad (X \to -\infty)$$

は別の方程式．別の解

sine-Gordon $(x, y, X, Y, \theta \in \mathbb{R})$

$$\partial_x \partial_y \, \theta = -4 \sin \theta$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) \theta = -4 \sin \theta \qquad \theta \to 2n\pi$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) \theta = 4 \sin \theta \qquad \theta \to 2n\pi$$

sinh-Gordon $(x, y, X, Y, v \in \mathbb{R})$

$$\partial_x \partial_y \, v = -4 \sinh v$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) v = -4 \sinh v$$

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) v = 4 \sinh v$$

系に対する付加条件

- 実数性，複素共役性
- 境界条件
- 解の正則性

$$v = 2 \log \frac{g}{f} \qquad\qquad \theta = \frac{2}{i} \log \frac{g}{f}$$

$f = 0 \ \Big(\text{or } g = 0\Big)$のとき v, θ 発散

sine-Gordon　双曲型　$\theta_{xy} = -4\sin\theta$　　$\theta = \frac{2}{i}\log\frac{g}{f}$

$$f = \tau_0 = \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i+p_j}\alpha_i\beta_j\, e^{(p_i+p_j)x-\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_j}\right)y}\right)_{N\times N}$$

$$g = \tau_1 = \det\left(\delta_{ij} - \frac{1}{p_i+p_j}\alpha_i\beta_j\, e^{(p_i+p_j)x-\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_j}\right)y}\right)_{N\times N}$$

- 実数性　　$\theta \in \mathbb{R}$ のためには $|f| = |g|$

（たとえば　$g = \overline{f}$）

$p_j \in \mathbb{R},\quad \alpha_j \in \mathbb{R},\quad \beta_j \in i\,\mathbb{R}$　ととれば

$g = \overline{f}$　for　$x, y \in \mathbb{R}$

- 解の正則性

$f \neq 0$ for $x, y \in \mathbb{R}$ を満足させたい

$\alpha_j = e^{\xi_{j0}}, \qquad \beta_j = \sqrt{-1}\, e^{\xi_{j0}}$ ととって

$$f = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\sqrt{-1}}{p_i + p_j}\, e^{\xi_i + \xi_j}\right)_{N \times N}$$

$$p_j \in \mathbb{R}, \qquad \xi_j = p_j x - \frac{1}{p_j} y + \xi_{j0} \quad \in \mathbb{R}$$

$f \neq 0$ を示す

$$f = \det\left(I + \sqrt{-1}S\right)_{N\times N}$$ S : 実対称行列

Sの固有値 $s_j \in \mathbb{R}$

$$f = \prod_{j=1}^{N}(1 + \sqrt{-1}s_j) \neq 0$$

sine-Gordon 楕円型

$$\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\theta = +4\sin\theta \qquad \theta = \frac{2}{i}\log\frac{g}{f}$$

$$X = x - y, \quad Y = \frac{x+y}{i}, \quad y = -\overline{x}$$

$$f = \det\left(\delta_{ij} + \frac{1}{p_i + p_j}\alpha_i\beta_j\, e^{(p_i+p_j)x - \left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_j}\right)y}\right)$$

$$g = \det\left(\delta_{ij} - \qquad \text{〃} \qquad\right)$$

- 実数性

$|p_j| = 1$ ととると $p_j x - \dfrac{1}{p_j}y = p_j x + \overline{p}_j\overline{x} \in \mathbb{R}$

$$\alpha_i = p_i^{\frac{1}{2}}\, r_i, \qquad \beta_j = p_j^{\frac{1}{2}}\, r_j \sqrt{-1} \ \ (r_j \in \mathbb{R})$$

ととると

$$\frac{1}{p_i + p_j}\, \alpha_i \beta_j = \sqrt{-1}\, \frac{r_i r_j}{\left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \in \sqrt{-1}\, \mathbb{R}$$

$$f = \det \left(\delta_{ij} + \frac{\sqrt{-1}}{\left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{2}}}\, e^{\xi_i + \xi_j} \right)$$

$$\xi_j = p_j x - \frac{1}{p_j} y + \xi_{j0} \quad (r_j = e^{\xi_{j0}})$$

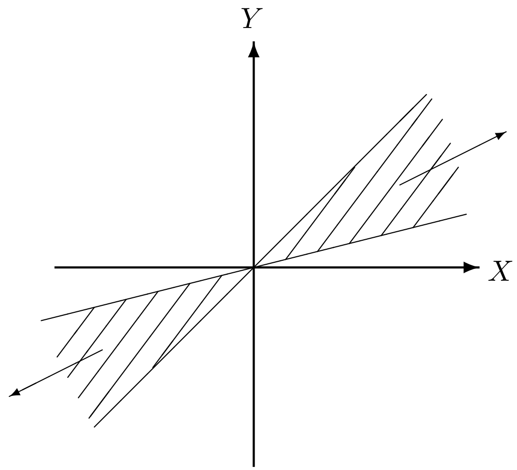
- 解の正則性

$f \neq 0 \qquad \text{for} \qquad y = -\overline{x}$

- 境界条件

(X, Y) 平面のあるセクターで，遠方で $\xi_i \to -\infty$ とする

$(1 \leq i \leq N)$



$$\xi_i \to -\infty$$

$$f \to 1, \qquad g \to 1, \qquad \theta \to 0$$

$$\xi_i \to +\infty, \qquad \left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} \to \det\left(\frac{\pm\sqrt{-1}}{(p_i/p_j)^{1/2} + (p_j/p_i)^{1/2}}\right) e^{2(\xi_1 + \cdots + \xi_N)}$$

$$\frac{g}{f} \to (-1)^N, \qquad \theta = \frac{2}{i}\log\frac{g}{f} \to 2n\pi$$

問題．
$$\begin{cases} \left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right)\theta = 4\sin\theta \\ \text{境界条件：遠方で}\quad \theta \to (2n+1)\pi \end{cases}$$
の正則解をつくれ

問題．
$$\begin{aligned} &\theta \to 2n\pi && (X \to -\infty) \\ &\theta \to (2m+1)\pi && (X \to +\infty) \end{aligned}$$
をつなぐ解はつくれるか．
（楕円型．双曲型）

B型，C型の戸田格子

$$\frac{1}{2}D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$$

左右対称な格子に制限する．

<u>C型</u>

$$\cdots \quad \tau_{-2} \quad \tau_{-1} \quad \tau_0 \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots$$

$\uparrow$

ここを中心に

$$\tau_1 = \tau_{-1}, \quad \tau_2 = \tau_{-2}, \quad \tau_3 = \tau_{-3}, \quad \cdots$$

<u>B型</u>

$$\cdots \quad \tau_{-2} \quad \tau_{-1} \quad \tau_0 \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots$$

$\uparrow$

ここを中心に

$$\tau_1 = \tau_0, \quad \tau_2 = \tau_{-1}, \quad \tau_3 = \tau_{-2}, \quad \cdots$$

$$\tau_n = \det\left(c_{ij} + \int^x \varphi_i^n \psi_j^n dx\right)_{N\times N}$$

$$\partial_x \varphi_i^n = \varphi_i^{n+1} \qquad \partial_y \varphi_i^n = -\varphi_i^{n-1}$$

$$\partial_x \psi_j^n = -\psi_j^{n-1} \qquad \partial_y \psi_j^n = \psi_j^{n+1}$$

<u>C型</u>

$$\left.\begin{aligned} &\psi_j^n = (-1)^n \varphi_j^{-n} \\ &c_{ij} = c_{ji} \end{aligned}\right\} \text{ととると}$$

$$\tau_n = \det\left(c_{ij} + \int^x (-1)^n \varphi_i^n \varphi_j^{-n} dx\right) = \tau_{-n}$$

B型

$$\left.\begin{aligned} &\psi_j^n = (-1)^n \varphi_j^{1-n} \\ &c_{ij} = -c_{ji} \\ &N : \text{even} \end{aligned}\right\} \text{ととると}$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \det\left(c_{ij} + \int^x (-1)^n \varphi_i^n \varphi_j^{1-n} dx\right)_{N\times N} \\ &= \det\left(-c_{ji} - \int^x (-1)^{1-n} \varphi_j^{1-n} \varphi_i^n dx\right)_{N\times N} \\ &= \tau_{1-n} \end{aligned}$$

☆ Gram 行列式表示だと，様々な
付加条件を満足させやすい.

☆ しかし，万能ではない.
境界条件や正則性については
一般論はまだない.