# 離散可積分曲面論入門

## ウィンタースクール 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2014

小林 真平

北海道大学 理学研究院

2014 年 2 月 23 日（日）

四元数体 $\mathbb{H}$：

$$\mathbb{H} = \{a1 + b\mathfrak{i} + c\mathfrak{j} + d\mathfrak{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

$\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = \mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k} = -1$. 行列を用いると $\mathfrak{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\mathfrak{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. （$i = \sqrt{-1}$ とした）. $\operatorname{Im}\mathbb{H} = \{a\mathfrak{i} + b\mathfrak{j} + c\mathfrak{k} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}^3$ と同一視できる：

$$J : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \to x = -\frac{1}{2}(c\mathfrak{i} + b\mathfrak{j} + a\mathfrak{k}) \in \operatorname{Im}\mathbb{H}.$$

この対応で回転は

$$R\mathbf{x} \;\; (R \in SO_3) \Leftrightarrow FxF^{-1}, \;\; (F \in SU_2).$$

と表現できる. ここで

$$SO_3 = \left\{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A^tA = \mathrm{id}, \det A = 1\right\} \quad (3\text{ 次の特殊直交群}),$$
$$SU_2 = \left\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{C}) \mid A^t\overline{A} = \mathrm{id}, \det A = 1\right\} \quad (2\text{ 次の特殊ユニタリ群}).$$

特にこれらは多様体と群の構造を持ったリー群と呼ばれるものであり,

$$SO_3 \cong SU_2/\pm\mathrm{id}, \;\; (SU_2 \text{ は } SO_3 \text{ の二重被覆})$$

が成立する.

例えば $x_3$ 軸に関する回転行列 $R_3$ は，回転角を $\theta \in \mathbb{R}$ として

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書けるが，対応する $SU_2$ の行列 $F_3$ は

$$F_3 = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

となる．何故ならば，$x = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$，つまり $(0,0,1)^t \in \mathbb{R}^3$，とすると

$$F_3 x F_3^{-1} = x.$$

つまり，$x$ を固定する，1 径数部分群であり，$x_3$ の周りの回転に対応する．また，$\mathbb{R}^3$ の内積 $\langle , \rangle$ と外積 $\times$ は次の様に対応する：

$$\langle J^{-1}x, J^{-1}y \rangle = -2\,\mathrm{Tr}(xy),$$
$$J^{-1}x \times J^{-1}y = J^{-1}[x, y],$$

ここで $J : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ を前のページの同一視とし，$\mathrm{Tr}(X)$ は行列 $X$ のトレース，$[A, B] = AB - BA$ は行列の括弧積である．

## 練習問題

同様に $x_1$，$x_2$ 軸に関する回転行列 $R_1, R_2$ に対応する特殊ユニタリ行列 $F_1, F_2$ を求めよ．また内積と外積の関係が正しい事を確かめよ．

$\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$: 単連結な領域，座標を $(x, y) \in \mathbb{D}$ とする．

曲面 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3 \cong \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ を考える．

曲面の情報は，接平面（$f_x, f_y$ で張られる）と法ベクトル $(f_x \times f_y$ による）によって決定される．特に，これらの微分が作る偏微分微分方程式によって決定される．

正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を用いると，

$$(e_1, e_2, e_3)_x = (e_1, e_2, e_3)U_{\mathbb{R}^3}, \quad (e_1, e_2, e_3)_y = (e_1, e_2, e_3)V_{\mathbb{R}^3}.$$

と書ける．$(e_1, e_2, e_3) \in SO_3$ である事に注意すると，$U_{\mathbb{R}^3}$，$V_{\mathbb{R}^3}$ は $\mathrm{so}_3$ の元．

先の対応を用いると，ある $F \in SU_2$ が存在して

$$F_x = FU, \quad F_y = FV$$

を満たす．$U, V$ は，$SU_2$ のリー環 $\mathfrak{su}_2$ に値を持つ．

$(e_1, e_2, e_3) \in SO_3$（または対応する $F \in SU_2$）を曲面 $f$ の動標構と呼ぶ．

逆に $U$ と $V$ を与えた時，$F$ が存在する条件は何かと考えると，それは両立条件と呼ばれ，

$$U_y - V_x + [V, U] = \mathbf{0}$$

で与えられる．曲面の言葉では，これはガウス・コダッチの方程式である．

### コメント

外微分形式を用いるとこれは，$dF = F\omega$ と書かれる．両立条件は $d\omega + \omega \wedge \omega = \mathbf{0}$ である（モレー・カルタンの方程式）．

ガウス曲率 $K = \frac{\det II}{\det I}$ が負の曲面 $K < 0$ に対しては，特別な座標系 $(x, y)$（漸近座標系と呼ばれる）が存在する:

$$f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} \perp n,$$

ここで $n$ を曲面の単位法線ベクトルとした（証明は例えば，梅原-山田「曲線と曲面」[?] を見よ）．この時第一，第二基本形式は

$$\begin{aligned} I &= A^2(dx)^2 + 2AB\cos\phi\; dxdy + B^2(dy)^2 \\ II &= 2\langle f_{xy}, n\rangle\; dxdy \end{aligned}$$

と書ける．ここで $A = ||f_x||, B = ||f_y||$ で $\phi$ は漸近線の間の角度で $0 < \phi < \pi$．ガウス曲率は

$$K = \frac{\det II}{\det I} = -\frac{\langle f_{xy}, n\rangle}{A^2B^2\sin^2\phi} = -\frac{1}{\rho^2},\quad (\rho \neq 0).$$

先の対応で特殊ユニタリ群 $F$ に値を取る動標構の式を書いてみると,

$$F_x = FU = F\begin{pmatrix} -i(u-\frac{\phi_x}{4}) & -\frac{ia}{2}e^{i\phi/2} \\ -\frac{ia}{2}e^{-i\phi/2} & i(u-\frac{\phi_x}{4}) \end{pmatrix}, \quad F_y = FV = F\begin{pmatrix} -i(v+\frac{\phi_y}{4}) & \frac{ib}{2}e^{-i\phi/2} \\ \frac{ib}{2}e^{i\phi/2} & i(v+\frac{\phi_y}{4}) \end{pmatrix}.$$

ここで $a=\frac{A}{\rho}, b=\frac{B}{\rho}$, $u=\frac{B_x\cos\phi-A_y}{2B\sin\phi}$, $v=\frac{B_x-A_y\cos\phi}{2A\sin\phi}$ とおいた．両立条件 $F_{xy}=F_{yx}$，つまりガウスとコダッチの式，を書いてみると

$$\begin{aligned} &\phi_{xy}+2v_x-2u_y-ab\sin\phi=0, \\ &a_y+\frac{\rho_y}{2\rho}a-\frac{\rho_x}{2\rho}b\cos\phi=0, \quad b_x+\frac{\rho_x}{2\rho}b-\frac{\rho_y}{2\rho}a\cos\phi=0. \end{aligned}$$

## 練習問題

両立条件が正しい事を確かめよ．また，漸近座標系の下で動標構の偏微分方程式がこの様に書ける事を確かめよ．（ヒント：まず正規直交基底 $\{e_1,e_2,e_3\}\in SO_3$ とその微分が満たす式を求め，$SU_2$ に対応させる．）

今からガウス曲率 $K=-1$，つまりガウス曲率負一定曲面とする．
この時コダッチの方程式から $a_y=b_x=0$ がわかる，つまり $a,b$ はそれぞれ $x,y$ にしかよらない．
さらに $A=\rho a, B=\rho b$ も同じで，$u,v$ の定義より，$u=v=0$. 最終的にガウス-コダッチの方程式は

$$\phi_{xy}-ab\sin\phi=0,$$
$$a_y=0,\quad b_x=0.$$

径数の付け替えによって，$a=b=1$ とする事ができ（チェビシェフ座標系と呼ばれる），ガウス方程式は

$$\phi_{xy}-\sin\phi=0 \quad \text{（サイン・ゴルドン方程式, 可積分系）.}$$

今 $a\to\lambda a, b\to\lambda^{-1}b$ $(\lambda\in\mathbb{R}_+)$ となる変換で方程式は不変．従ってガウス曲率負一定曲面の族が存在する (曲面論の基本定理, Bonnet の定理より)．動標構は,

$$F_x^\lambda=F^\lambda U^\lambda=F^\lambda\begin{pmatrix} i\frac{\phi_x}{4} & -\frac{ia}{2}\lambda e^{i\phi/2}\\ -\frac{ia}{2}\lambda e^{-i\phi/2} & -i\frac{\phi_x}{4}\end{pmatrix},$$
$$F_y^\lambda=F^\lambda V^\lambda=F^\lambda\begin{pmatrix} -i\frac{\phi_y}{4} & \frac{ib}{2}\lambda^{-1}e^{-i\phi/2}\\ \frac{ib}{2}\lambda^{-1}e^{i\phi/2} & i\frac{\phi_y}{4}\end{pmatrix}.$$

単位法ベクトル $n$ を用いて，ガウス曲率負一定曲面を特徴付けをしよう．$n$ が球面 $\mathbb{S}^2$ への写像である事に注意して，次の定義を与える．

### 定義

写像 $n : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ がローレンツ調和写像とは $n$ が次の方程式を満たす時の事を言う：

$$n_{xy} = \rho n, \quad (\exists \rho : \mathbb{D} \to \mathbb{R}).$$

ここで $(x, y) \in \mathbb{D}$ は $\mathbb{D}$ をローレンツ多様体と見た時のローレンツ座標とした．

### 定理

ガウス曲率負の曲面に対して次は同値：

1. ガウス曲率は負一定．
2. 単位法ベクトル $n$ はローレンツ調和写像．

### 練習問題

この事を証明せよ．（ヒント：$n = \frac{1}{2} F k F^{-1}$ と書ける事を用いて，$n_{xy}$ と $n_{yx}$ を計算する．ここで $k$ は対角行列で成分が $i, -i$ とした．）

### コメント

調和写像は，写像のエネルギーの臨界点として定義される変分問題で重要な幾何学的対象である．詳しくは例えば西川や浦川の本に詳しい [?, ?].

次に $\lambda$ で径数付けされた動標構の族 $\{F^\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ からガウス曲率負一定曲面を復元しよう．

### 定理

写像 $f : \mathbb{D} \to \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ を

$$f^\lambda = \lambda \frac{\partial F^\lambda}{\partial \lambda}(F^\lambda)^{-1}|_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$$

で定める．この時，$f^\lambda$ はガウス曲率負一定曲面を定める．

### 練習問題

この定理が正しい事を確かめよ．（ヒント：第一，第二基本形式をもとめ，ガウス曲率を求める.）

ガウス曲率負一定曲面の動標構 $F_x = FU, F_y = FV$ を少し書き換える．$F \to \tilde{F} = Fd$ とする．ここで $d$ は対角行列で成分が $\exp(-i\phi/4), \exp(i\phi/4)$ とした．すると簡単な計算によって，$\tilde{F}$ は次の方程式を満たす：

$$\tilde{F}_x = \tilde{F}\tilde{U} = \tilde{F}\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \phi_x & -\lambda \\ -\lambda & \phi_x \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_y = \tilde{F}V = \tilde{F}\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1}e^{-i\phi} \\ \lambda^{-1}e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}.$$

### コメント

幾何学的には，これは動標構を法ベクトルの周りに回転させた事と同じである．可積分系では，この方程式系は Lax 形式と呼ばれる．

滑らかなガウス曲率負一定曲面のアナロジーとして，離散ガウス曲率負一定曲面を定義したい．

方法 1: 漸近座標系かつ $a_y = b_x = 0$ という性質を離散化し，さらにローレンツ調和写像を離散化する．幾何学的な手法（Bobenko-Pinkall の論文のオリジナルな方法，Journal of Differential Geometry 1996 [?]）

方法 2: Lax 形式（動標構）を差分化する（可積分系の性質を保つ様にする, [?] 参照.）.

ここでは方法 **2** を用いて差分化してみる．動標構は

$$F_x = FU = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\phi_x & -\lambda \\ -\lambda & \phi_x\end{pmatrix}, \quad F_y = FV = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & \lambda^{-1}e^{-i\phi} \\ \lambda e^{i\phi} & 0\end{pmatrix}$$

だった．微分を差分に単純に置き換えると（差分間隔は，$n, m$ ともに等しいとしよう.）

$$\begin{aligned}
F(x,y) &\to F(n,m), \\
F_x(x,y) &\to \frac{F(n+\epsilon, m) - F(n,m)}{\epsilon}, \\
F_y(x,y) &\to \frac{F(n, m+\epsilon) - F(n,m)}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

つまり

$$F(n+\epsilon, m) = F(n,m)(\mathrm{id} + \epsilon\mathcal{U})$$
$$F(n, m+\epsilon) = F(n,m)(\mathrm{id} + \epsilon\mathcal{V})$$

となっている．$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ は $U, V$ に対応する差分化された何かである．ここで，
$F(n,m), F(n+\epsilon,m), F(n,m+\epsilon)$ はすべて $SU_2$ の元であるので，$\mathrm{id}+\epsilon U$, $\mathrm{id}+\epsilon V$ も $SU_2$ の元である事に注意 (滑らかな場合との違い！)
さてここで，次の様な要請をしてみる：

$\mathrm{id}+\epsilon\mathcal{U}$ と $\mathrm{id}+\epsilon\mathcal{V}$ は，$U$ と $V$ と $\lambda$ に関して同じ構造を持つ．

今差分間隔 $\epsilon$ を $\epsilon = 1$ と固定しよう．この時上の要請から

$$\mathrm{id} + \epsilon\mathcal{U} = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_1-\phi)} & ip\lambda \\ ip\lambda & e^{-i(\phi_1-\phi)} \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{id} + \epsilon\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & iqe^{-i(\phi_2+\phi)}\lambda^{-1} \\ iqe^{i(\phi_2+\phi)}\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

が導かれる．ここで記号の説明をしておこう．

$$\phi = \phi(n,m), \quad \phi_1 = \phi(n+1,m), \quad \phi_2 = \phi(n,m+1).$$

さらに

$$p = p(n), \quad q = q(m)$$

である．念のため滑らかな場合の $U, V$ を再掲しておくと

$$F_x = FU = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \phi_x & -\lambda \\ -\lambda & \phi_x \end{pmatrix}, \quad F_y = FV = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1}e^{-i\phi} \\ \lambda e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}.$$

つまり，$\mathcal{U}$ は $\lambda$ の 1 次の項のみで $\mathcal{V}$ は $\lambda$ の $-1$ 次の項のみである．今行列は，$SU_2$ に近いが行列式が 1 ではない．そこで行列式を 1 にするために，

$$\Delta_+ = \sqrt{1+p^2\lambda^2},\ \ \Delta_- = \sqrt{1-q^2\lambda^2}$$

としよう．最終的に次の離散化を得る：

$$\begin{aligned}
F_1 &= FU = F\frac{1}{\Delta_+}\begin{pmatrix} e^{i(\phi_1-\phi)} & ip\lambda \\ ip\lambda & e^{-i(\phi_1-\phi)} \end{pmatrix}, \\
F_2 &= FV = F\frac{1}{\Delta_-}\begin{pmatrix} 1 & iqe^{-i(\phi_2+\phi)}\lambda^{-1} \\ iqe^{i(\phi_2+\phi)}\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$F = F(n,m),\ \ U = U(n,m),\ \ V = V(n,m),\ \ F_1 = F(n+1,m),\ \ F_2 = F(n,m+1).$$

両立条件

$$F_{12} = F(n+1, m+1) = F_{21}$$

を計算すると，

$$\sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2 - \phi_{12} - \phi}{2}\right) = pq \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2 + \phi_{12} + \phi}{2}\right).$$

この離散方程式を離散サイン・ゴルドン方程式と呼ぶ．

### コメント

広田は，独自の方法（双線形化法と呼ばれる）を用いて様々な可積分系を差分化していた．サイン・ゴルドン方程式に対しても差分方程式（広田の方程式とも呼ばれる，1977）を求めていてそれは，離散サイン・ゴルドン方程式と一致する．

滑らかな時と同様に，対数微分を取ると次の定理を得る．

## 定理

$f$ を次のように定める（上付きの $\lambda$ は省略している）：

$$f = \lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda}(F)^{-1}|_{\lambda \in \mathbb{R}_+}.$$

この時，$f$ は次の性質を満たす：

1. 各点 $f = f(n, m)$ に対してある平面 $P = P(n, m)$ が存在して

$$f,\ f_1,\ f_2,\ f_{\bar{1}},\ f_{\bar{2}} \in P.$$

   ここで $f_1 = f(n+1, m), f_2 = f(n, m+1), f_{\bar{1}} = f(n-1, m), f_{\bar{2}} = f(n, m-1)$ （漸近座標の離散アナロジー，5 点が平面にのっている）．

2. 対辺の長さは同じである，つまり：

$$||f_1 - f|| = ||f_{12} - f_2|| = A,\ \ ||f_2 - f|| = ||f_{12} - f_1|| = B,$$

   ここで $A = A(n), B = B(m)$ とした．（チェビシェフ座標のアナロジー，長さが 1 変数関数になる．）

従って $f$ は，離散ガウス曲率負一定曲面である（上の 2 つの性質を満たすものをそう呼ぶ）．

## 証明の概略.

$$f_1 - f = \lambda \frac{\partial FU}{\partial \lambda}(FU)^{-1} - \lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} F^{-1} = F(\lambda \frac{\partial U}{\partial \lambda} U^{-1}) F^{-1}.$$

ここで

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial \lambda} U^{-1} = -\frac{1}{\Delta_+^2} \begin{pmatrix} 0 & ipe^{i(\phi_1 - \phi)}\lambda \\ ipe^{-i(\phi_1 - \phi)}\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

同様に

$$f_{\bar{1}} - f = \lambda \frac{\partial FU_{\bar{1}}^{-1}}{\partial \lambda}(FU_{\bar{1}})^{-1} - \lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} F^{-1} = F(-\lambda U_{\bar{1}}^{-1} \frac{\partial U_{\bar{1}}}{\partial \lambda}) F^{-1}.$$

ここで

$$-\lambda U_{\bar{1}}^{-1} \frac{\partial U_{\bar{1}}}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\Delta_+^2} \begin{pmatrix} 0 & ipe^{i(\phi - \phi_{\bar{1}})}\lambda \\ ipe^{-i(\phi - \phi_{\bar{1}})}\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

従って $||f_1 - f|| = ||f - f_{\bar{1}}||$. 同様にして，$f_2 - f$, $f - f_{\bar{2}}$ を計算すると，$||f_2 - f|| = ||f - f_{\bar{2}}||$ が言える．さらに $f_2 - f$, $f - f_{\bar{2}}$ の形は $FXF^{-1}$ であり，$X$ は非対角行列である事がわかる．従って，$f_1 - f, f - f_{\bar{1}}, f_2 - f, f - f_{\bar{2}}$ はすべて，単位法ベクトル $n = FkF^{-1}$ と直交する（ここで $k$ は対角行列で，成分を $i/2, -i/2$ とした）．従って 5 点 $f, f_1, f_{\bar{1}}, f_2, f_{\bar{2}}$ は同一平面上にのっている． □

## 練習問題

証明を完成させよ．

今，離散サイン・ゴルドン方程式を別の形式に書いておこう．まず，先の定理から，辺の間の角度 $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$ を次のように定める事ができる：

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= -\phi_2 - \phi_1 + \pi, \\ u^{(2)} &= \phi_{\bar{1}} + \phi_2, \\ u^{(3)} &= -\phi_2 - \phi_{\bar{1}} + \pi, \\ u^{(4)} &= \phi_1 + \phi_{\bar{2}}. \end{aligned}$$

ここで，

$$\phi_1 = \phi(n+1, m), \quad \phi_2 = \phi(n, m+1), \quad \phi_{\bar{1}} = \phi(n-1, m), \quad \phi_{\bar{2}} = \phi(n, m-1)$$

とした．これらの角度が同一平面上の角度である事と簡単な対称性から

$$u^{(1)} = u^{(3)}_{12}, \; u^{(2)}_1 = u^{(4)}_2, \quad u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} = 0 \pmod{2\pi}$$

となる．$Q$ と $k$ を

$$Q = \exp(iu^{(1)}), \quad k = pq$$

と定める．この時離散サイン・ゴルドン方程式は次のようになる：

$$Q_{12} Q = \frac{Q_1 - k_1}{1 - k_1 Q_1} \frac{Q_2 - k_2}{1 - k_2 Q_2}$$

## 練習問題

$u^{(j)}$ $(j \in \{1, 2, 3, 4\})$ が辺の間の角度である事を示せ（ヒント：$\langle f_1 - f, f_2 - f \rangle = ||f_1 - f|| \cdot ||f_2 - f|| \cos u^{(1)}$ を使え）．また離散サイン・ゴルドン方程式の書き換えが正しい事を確かめよ．

### コメント

$Q$ はベクトルのなす角によって定まる量であるので，書き換えた方程式を離散サイン・ゴルドン方程式と呼ぶ方が良いかも知れない（オリジナルな離散方程式は広田方程式とも言われる）．

滑らかな時，ガウス曲率負一定曲面は単位法ベクトル $n$ を用いて特徴付けする事ができた，つまり $n$ はローレンツ調和写像だった：

$$n_{xy} = \rho n, \quad (\exists \rho : \mathbb{D} \to \mathbb{R}).$$

離散ガウス曲率負一定曲面に対しても，漸近座標系の性質（つまり 5 点が同一平面上にある）から，各点 $f = f(n, m)$ に対して，単位法ベクトル $n$ が定まる：

$$n = \frac{i}{2} F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} F^{-1}.$$

この時，単位法ベクトル $n$ が離散版ローレンツ調和写像である事が期待される．まず離散ローレンツ調和写像を定義しよう．

### 定義 (と定理)

写像 $n : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{S}^2$ に対して，次の性質を満たすものを離散ローレンツ調和写像と呼ぶ：

$$n_{12} - n_1 - n_2 + n = \rho(n_{12} + n_1 + n_2 + n), \quad \rho : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}.$$

この時離散ガウス曲率負一定曲面の単位法ベクトル $n$ は，離散ローレンツ調和写像である．

### 練習問題

この定理を証明せよ（直接計算せよ）．

### 例 (1)

座標 $(n, m)$ は，漸近座標系の離散アナロジーであったので，$(\tilde{n}, \tilde{m}) = (n+m, n-m)$ は曲率線座標系の離散アナロジーである．曲率線座標での代表的な例は，1 径数部分群で不変な回転面である．曲面の角度 $Q$ が $\tilde{m}$ によらないという仮定を置くと離散サイン・ゴルドン方程式は

$$Q_1 Q_{\bar{1}} = \left( \frac{Q - c^2}{1 - c^2 Q} \right)^2$$

となる．$Q = Q(\tilde{n})$ で $c$ は $0 \neq |c| < 1$ となる実定数とした．

### 例 (2)

回転面は，曲面自体が 1 径数部分群で不変な曲面であったが，漸近座標系の間の角 $\phi$ だけが 1 径数部分群で不変という条件を置くと，サインゴルドン方程式は PainleveⅢ 方程式（パラメータは特殊）となる．離散のアナロジーは次で得られる（Tim Hoffman によって最初に得られた）：

$$QQ_{\bar{1}\bar{2}} + \frac{m-n}{m+n}(Q_{\bar{1}\bar{2}} - Q)\left( \frac{q^2 - Q_{\bar{1}}}{1 - q^2 Q_{\bar{1}}} \right) = \left( \frac{q^2 - Q_{\bar{1}}}{1 - q^2 Q_{\bar{1}}} \right)^2$$

### 注意

上の方程式は，離散 PainleveⅢ 方程式の特別な場合と一致するが，下の方程式はほとんど知られていないと思われる．

## まとめ

- $\mathbb{R}^3$ の曲面の話を四元数の虚数部分と動標構を用いて表現した．
- ガウス曲率負曲面（一定とは限らない）には，漸近座標系が存在する．
- ガウス曲率負一定曲面にはチェビシェフ座標系が存在し，構造方程式はサイン・ゴルドン方程式と呼ばれる可積分系になる．
- サイン・ゴルドン方程式は動標構の族の両立条件として書け（Lax 形式），そこからガウス曲率負一定曲面を表す Sym の公式が得られる．
- ガウス曲率負一定曲面の離散化を動標構の族のもつ構造から導いた．
- 離散化された構造方程式，離散サイン・ゴルドン方程式は広田方程式である．
- そこから導かれた離散ガウス曲率負一定曲面は，滑らかな場合に対応する構造を持つ．

## 課題

- 動標構の構造を保つ差分化は，ドレッシング作用とも相性が良い．Pedit-Wu[?] はドレッシング作用を用いて，真空解に対応する動標構からドレッシング作用によって離散サイン・ゴルドン方程式を導きだした．ソリトン解やブリーザー解に対応する離散動標構をドレッシング作用によって構成し，その幾何学的性質を調べる事は面白い．(離散回転面に対して同様の事をしてみるのも面白い．)
- 離散サイン・ゴルドン方程式の離散動標構は，定振率空間離散曲線の時間発展としても得られる．これらの離散曲線の時間発展との関連を色々調べる事は面白い．

# 参考文献


A. Bobenko, U. Pinkall,
*Discretization of surfaces and integrable systems*
Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 16, Oxford Univ. Press, New York, 1999.
離散曲面のサーベイ論文．今回話した動標構からの直接の離散化が述べられている．その他の曲面の離散化等についても述べられている．

A. Bobenko, U. Pinkall,
*Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation*
J. Differential Geom., 1996.
初めて離散ガウス曲率負一定曲面が定義された．幾何学的な設定から種々の離散方程式を導き出した．後半は離散有限型（離散化されたテータ関数を用いて）の曲面について詳しく述べられている．

F. Pedit, H Wu,
*Discretizing constant curvature surfaces via loop group factorizations: the discrete sine- and sinh-Gordon equations*
J. Geom. Phys. 17, 1995.
ドレッシング作用によって離散ガウス曲率負一定曲面の構成が述べられている．離散平均曲率一定曲面に対しても同様の方法で構成している．

T. Hoffmann,
*Discrete Amsler surfaces and a discrete Painlevé III equation*
Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 16, Oxford Univ. Press, New York, 1999.
離散 PainleveⅢ 方程式と対応する離散曲面（Amsler 曲面）について述べられている．

## 参考文献 （続き）


A. Bobenko, Y. Suris,
*Discrete differential geometry. Integrable structure*
Graduate Studies in Mathematics, 98. 2008.
離散微分幾何学に関する初めての書籍． 網羅的に書いてある．

S.-P. Kobayashi,
*Discretization of integrable systems via dressing actions*
RIMS Kokyuroku Bessatsu, B41, 2013.
ドレッシング作用によって (m)KdV の離散化を導いた（日本語!）．

梅原雅顕， 山田光太郎,
曲線と曲面-微分幾何学的アプローチ
裳華房, 2002 年.
漸近座標系の証明が述べられている． 他の曲面についても豊富に述べられている．

西川青季,
幾何学的変分問題
岩波書店, 2006 年.
調和写像（リーマン） についての教科書.

浦川肇,
変分法と調和写像
裳華房, 1990 年.
西川と同じく調和写像（リーマン） についての教科書.

何か聞きたい事，知りたい事，練習問題の解答について知りたい場合は，小林真平（北海道大学）のメールアドレス

`shimpei@math.hokudai.ac.jp`

まで連絡してくれれば，対応します．