離散可積分系入門 (III)

(An introduction to discrete integrable systems)

筧 三郎 (立教大学理学部)

九州大学産業技術数理研究センター 第 9 回ワークショップ
離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

2010 年 2 月 22 日 (月)

Outline

- 広田・三輪方程式
  - 対称性の高い座標と広田・三輪方程式
  - 離散 KdV 方程式への簡約化
- 全体のまとめ
  - ソリトン方程式の差分化

§3.1. 広田・三輪方程式

離散２次元戸田格子（離散戸田場）方程式に対して，対称性の高い座標系のとり方を導入し，そこで現れる

$$\text{“DAGTE”} \simeq \text{“広田・三輪方程式”}$$

を紹介する.

離散 2 次元戸田方程式から “DAGTE” へ

離散 2 次元戸田方程式 (双線形形式)

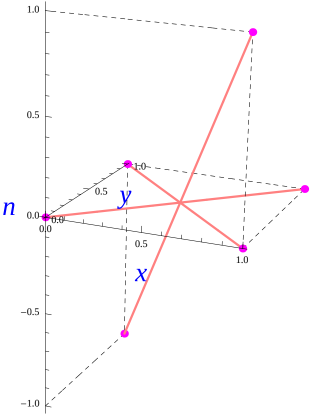
$$
\begin{aligned}
&ab\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b)\\
&+\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)\\
&-(1+ab)\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y)=0
\end{aligned}
$$

この関係式に現れる (x,y,n) 空間内の点の配置を見ると，x，y，n それぞれの変数のずれ方が対等ではないことが分かる．

$$\Downarrow$$

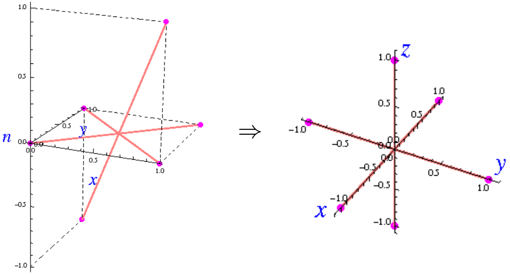
《アイデア》

座標のずれ方が対等になるような座標系をとって，その座標系で考える．



離散 2 次元戸田方程式から “DAGTE” へ

座標を取り直す：



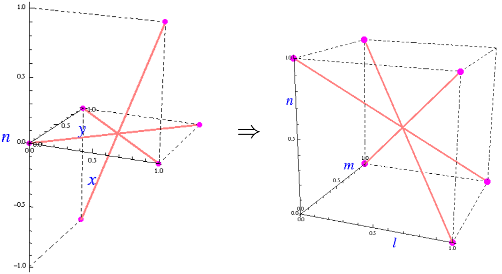
新しい座標での方程式

$$
\begin{aligned}
&Z_1 f(x_1+1,x_2,x_3) f(x_1-1,x_2,x_3) \\
&+ Z_2 f(x_1,x_2+1,x_3) f(x_1,x_2-1,x_3) \\
&+ Z_3 f(x_1,x_2,x_3+1) f(x_1,x_2,x_3-1) = 0
\end{aligned}
$$

Ryogo Hirota, “Discrete Analogue of a Generalized Toda Equation”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981), 3785–3791.

離散 2 次元戸田方程式から “広田・三輪方程式” へ

座標を取り直す：
(先程とは別のもの)



新しい座標での方程式

$$
\begin{aligned}
&Z_1 f(\ell+1,m,n) f(\ell,m+1,n+1)\\
&+Z_2 f(\ell,m+1,n) f(\ell+1,m,n+1)\\
&+Z_3 f(\ell,m,n+1) f(\ell+1,m+1,n)=0
\end{aligned}
$$

Tetsuji Miwa, “On Hirota’s difference equations”, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci.* **58** (1982), 9–12.

離散 2 次元戸田方程式から "広田・三輪方程式" へ

$$\begin{aligned} &Z_1 f(\ell+1,m,n)f(\ell,m+1,n+1)+Z_2 f(\ell,m+1,n)f(\ell+1,m,n+1) \\ &\qquad +Z_3 f(\ell,m,n+1)f(\ell+1,m+1,n)=0 \end{aligned}$$

$f(\ell,m,n)=\lambda^{mn}\mu^{n\ell}\nu^{\ell m}\tau(\ell,m,n)$ ("ゲージ変換") とすると,

$$\begin{aligned} &Z_1\lambda\,\tau(\ell+1,m,n)\tau(\ell,m+1,n+1)+Z_2\mu\,\tau(\ell,m+1,n)\tau(\ell+1,m,n+1) \\ &\qquad +Z_3\nu\,\tau(\ell,m,n+1)\tau(\ell+1,m+1,n)=0 \end{aligned}$$

この自由度を使って，係数を次のように選ぶことにする．

$$\begin{aligned} &a(b-c)\,\tau(\ell+1,m,n)\tau(\ell,m+1,n+1) \\ &+b(c-a)\,\tau(\ell,m+1,n)\tau(\ell+1,m,n+1) \\ &+c(a-b)\,\tau(\ell,m,n+1)\tau(\ell+1,m+1,n)=0 \end{aligned}$$

Tetsuji Miwa, "On Hirota's difference equations",
Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci. **58** (1982), 9–12.

広田・三輪方程式のソリトン解

広田・三輪方程式

$$
\begin{aligned}
a(b-c)\,\tau(\ell+1,m,n)\tau(\ell,m+1,n+1)& \\
+b(c-a)\,\tau(\ell,m+1,n)\tau(\ell+1,m,n+1)& \\
+c(a-b)\,\tau(\ell,m,n+1)\tau(\ell+1,m+1,n)&=0
\end{aligned}
$$

2 ソリトン解

$$\tau(\ell,m,n)=1+c_1E_1+c_2E_2+A_{12}c_1c_2E_1E_2$$

3 ソリトン解

$$
\begin{aligned}
\tau(\ell,m,n)=&\,1+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3\\
&+A_{12}c_1c_2E_1E_2+A_{13}c_1c_3E_1E_3+A_{23}c_2c_3E_2E_3+A_{12}A_{13}A_{23}E_1E_2E_3
\end{aligned}
$$

$$E_j=\left(\frac{1-aq_j}{1-ap_j}\right)^{\ell}\left(\frac{1-bq_j}{1-bp_j}\right)^{m}\left(\frac{1-cq_j}{1-cp_j}\right)^{n},\quad A_{jk}=\frac{(p_j-p_k)(q_j-q_k)}{(p_j-q_k)(q_j-p_k)}$$

離散 KdV 方程式への簡約化

広田・三輪方程式

$$\begin{aligned} & a(b-c)\,\tau(\ell+1,m,n)\tau(\ell,m+1,n+1) \\ & +b(c-a)\,\tau(\ell,m+1,n)\tau(\ell+1,m,n+1) \\ & +c(a-b)\,\tau(\ell,m,n+1)\tau(\ell+1,m+1,n)=0 \end{aligned}$$

要請：$\tau(\ell,m+1,n+1)=(\text{定数})\times\tau(\ell,m,n)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & a(b-c)\,\tau(\ell+1,m,n)\tau(\ell,m,n)+\ b(c-a)\,\tau(\ell,m+1,n)\tau(\ell+1,m-1,n) \\ & \qquad +c(a-b)\,\tau(\ell,m-1,n)\tau(\ell+1,m+1,n)=0 \end{aligned}$$

以下では n は固定して考えることにして，明記しない．

$$\begin{aligned} & a(b-c)\,\tau(\ell+1,m)\tau(\ell,m)+\ b(c-a)\,\tau(\ell,m+1)\tau(\ell+1,m-1) \\ & \qquad +\ c(a-b)\,\tau(\ell,m-1)\tau(\ell+1,m+1)=0 \end{aligned}$$

離散 KdV 方程式への簡約化

$$a(b-c)\,\tau(\ell+1,m)\tau(\ell,m)+\,b(c-a)\,\tau(\ell,m+1)\tau(\ell+1,m-1)$$
$$+\,c(a-b)\,\tau(\ell,m-1)\tau(\ell+1,m+1)=0$$

$$U(\ell,m):=\frac{\tau(\ell+1,m)\tau(\ell,m+1)}{\tau(\ell,m)\tau(\ell+1,m+1)},\quad \delta=-\frac{b(c-a)}{c(a-b)}$$ とすると，

$$\frac{1}{U(\ell,m-1)}-\delta U(\ell,m)=\frac{\tau(\ell,m-1)\tau(\ell+1,m)}{\tau(\ell+1,m-1)\tau(\ell,m)}-\delta\frac{\tau(\ell+1,m)\tau(\ell,m+1)}{\tau(\ell,m)\tau(\ell+1,m+1)}$$
$$=\frac{\tau(\ell+1,m)}{\tau(\ell,m)}\cdot\frac{\tau(\ell,m-1)\tau(\ell+1,m+1)-\delta\,\tau(\ell,m+1)\tau(\ell+1,m-1)}{\tau(\ell+1,m-1)\tau(\ell+1,m+1)}$$
$$=\frac{\tau(\ell+1,m)}{\tau(\ell,m)}\cdot\frac{-\frac{a(b-c)}{c(a-b)}\tau(\ell+1,m)\tau(\ell,m)}{\tau(\ell+1,m-1)\tau(\ell+1,m+1)}$$
$$=-\frac{a(b-c)}{c(a-b)}\cdot\frac{\tau(\ell+1,m)^2}{\tau(\ell+1,m-1)\tau(\ell+1,m+1)}$$

離散 KdV 方程式への簡約化

同様の計算により，

$$\frac{1}{U(\ell,m)} - \delta U(\ell,m-1) = \frac{\tau(\ell,m)\tau(\ell+1,m+1)}{\tau(\ell+1,m)\tau(\ell,m+1)} - \delta\frac{\tau(\ell+1,m-1)\tau(\ell,m)}{\tau(\ell,m-1)\tau(\ell+1,m)}$$

$$= \frac{\tau(\ell,m)}{\tau(\ell+1,m)}\cdot\frac{\tau(\ell,m-1)\tau(\ell+1,m+1)-\delta\,\tau(\ell,m+1)\tau(\ell+1,m-1)}{\tau(\ell,m-1)\tau(\ell,m+1)}$$

$$= \frac{\tau(\ell,m)}{\tau(\ell+1,m)}\cdot\frac{-\frac{a(b-c)}{c(a-b)}\tau(\ell+1,m)\tau(\ell,m)}{\tau(\ell,m-1)\tau(\ell,m+1)} = -\frac{a(b-c)}{c(a-b)}\cdot\frac{\tau(\ell,m)^2}{\tau(\ell,m-1)\tau(\ell,m+1)}$$

先程の関係式，

$$\frac{1}{U(\ell,m-1)} - \delta U(\ell,m) = -\frac{a(b-c)}{c(a-b)}\cdot\frac{\tau(\ell+1,m)^2}{\tau(\ell+1,m-1)\tau(\ell+1,m+1)}$$

と比較して，次の方程式が得られる．

$$\frac{1}{U(\ell+1,m+1)} - \frac{1}{U(\ell,m)} = \delta\left\{U(\ell+1,m) - U(\ell,m+1)\right\} \quad \text{(離散 KdV 方程式)}$$

(広田良吾・高橋大輔，九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.16ME-S1 (2005), Article No. 9.
Cf. R. Hirota, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 1424–1433.)

ここまでに現れた離散ソリトン方程式

$$\boxed{\text{離散 2 次元戸田方程式}} \simeq \boxed{\text{広田・三輪方程式}}$$

$$\swarrow \qquad \downarrow \qquad \searrow$$

$$\boxed{\text{離散 1 次元戸田方程式}} \quad \boxed{\text{離散 sine-Gordon 方程式}} \quad \boxed{\text{離散 KdV 方程式}}$$

「離散微分幾何」との関係

- 離散 2 次元戸田方程式 (→ 井ノ口さんの講義)
  離散化された射影微分幾何において，ある条件を満たす “曲面” の変換として現れる.
- 離散 sine-Gordon 方程式，離散 sinh-Gordon 方程式 (→ ラスマンさんの講義)
  離散化された “曲面” において，ある種の曲率が一定である条件の記述に現れる.
- 離散 KdV 方程式 (→ 松浦さんの講義)
  離散化された平面 “曲線” のある種の運動の記述に現れる.

§3.2. 全体のまとめ

ここまで，戸田方程式を中心に，

「解の構造を保つ差分化」＝「可積分差分」

を紹介した．ここまでの話を概観し，関連するいくつかの話題を紹介する．

微分方程式の「差分化」とは？

「差分化」 ＝ 「離散化」 ＝ “discretization”

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{微分方程式}} & \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} & \boxed{\text{差分方程式 (漸化式)}} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \boxed{\text{微分方程式の解 (関数)}} & \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} & \boxed{\text{差分方程式の解 (数列)}} \end{array}$$

ソリトン方程式の場合は，何らかの「構造」を保つように差分化する．

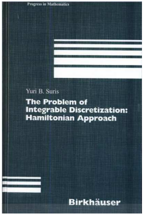
様々なアプローチ

- Lax 形式の差分化
  M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, *J. Math. Phys.* **16** (1975), 598.
  M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, *J. Math. Phys.* **17** (1976), 1011.
  M.J. Ablowitz, *Stud. Appl. Math.* **58** (1978), 17.
- 双線形形式に基づく差分化
  広田良吾 (1977∼) この講義でのアプローチ
- "Dressing method" (Zakharov-Shabat) の差分化
  D. Levi, L. Pilloni and P. M. Santini, *J. Phys. A* **14** (1981), 1567–1575.
  (2 次元戸田階層を差分化していることと同等．)
- 線形積分方程式による "direct linearization"
  G.R.W. Quispel, F.W. Nijhoff, H.W. Capel and J. van der Linden, *Physica A* **125** (1984), 344.
  F.W. Nijhoff, H.W. Capel, G.L. Wiersma and G.R.W. Quispel, *Phys. Lett. A* **103** (1984), 293.

様々なアプローチ

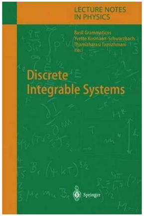
- Poisson 構造に基づく差分化

  Yuri B. Suris,
  “The Problem of Integrable Discretization:
  Hamiltonian Approach”, Birkhäuser (2003).
  (非常に分厚い本: 1070 pages !!)



- 他にも様々な研究方向がある.

  例えば，次のような本がある.
  B. Grammaticos, Y. Kosmann-Schwarzbach, and
  T. Tamizhmani (Eds.),
  “Discrete Integrable Systems” (Lecture Notes in
  Physics), Springer (2004).



双線形形式に基づく差分化

非線形微分方程式 —(変数変換)→ 双線形微分方程式

双線形微分方程式 —(“ソリトン解” を持つように差分化)→ 双線形差分方程式

双線形差分方程式 —(変数変換)→ 非線形差分方程式

Ryogo Hirota, Nonlinear partial difference equations.

I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 1424–1433.
II. Discrete-time Toda equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 2074–2078.
III. Discrete sine-Gordon equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 2079–2086.
IV. Bäcklund transformation for the discrete-time Toda equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **45** (1978), 321-332.
V. Nonlinear equations reducible to linear equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **46** (1979), 312–319.

双線形微分方程式の差分化の “レシピ”

(A) “ソリトン解” を持つように差分化する.

連続極限で元の方程式になる双線形差分方程式から,「1 ソリトン解」,「2 ソリトン解」,「3 ソリトン解」と作っていけるものを探す.

(B) “ソリトン解” を差分化する.

ソリトン解を行列式 (or パフィアン) で表しておいて，行列式 (or パフィアン) の恒等式より双線形差分方程式を導く.

Yasuhiro Ohta, Ryogo Hirota, Satoshi Tsujimoto, Tatsuya Imai, “Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) 1872–1886.

(C) “双線形恒等式” + “三輪変換”

τ 関数の満たす “双線形恒等式” に対して，“三輪座標” と呼ばれる座標を導入して留数計算を行うことにより，双線形差分方程式を導く.

Tetsuji Miwa, “On Hirota's difference equations”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **58** (1982), 9–12.

(B) “ソリトン解” を差分化する

ソリトン解を行列式 (or パフィアン) で表しておいて，行列式 (or パフィアン) の恒等式より双線形差分方程式を導く．

- Yasuhiro Ohta, Ryogo Hirota, Satoshi Tsujimoto, Tatsuya Imai, “Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) 1872–1886.
- Satoshi Tsujimoto, Ryogo Hirota, “Pfaffian representation of solutions to the discrete BKP hierarchy in bilinear form”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** (1996) 2797–2806.
- 辻本諭 「可積分系の離散化について」, 中村佳正編 『可積分系の応用数理』(裳華房, 2000) 所収.

(C) “双線形恒等式” + “三輪変換”

τ 関数の満たす “双線形恒等式” に対して，“三輪座標” と呼ばれる座標を導入して留数計算を行うことにより双線形差分方程式を導く．

- Tetsuji Miwa (三輪哲二),
  “On Hirota’s difference equations”,
  Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), 9–12.
- Etsuro Date, Michio Jimbo, Tetsuji Miwa (伊達悦朗，神保道夫，三輪哲二),
  “Methods for generating discrete soliton equations.”
  I. *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982), 4116–4124.
  II. *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982), 4125–4131.
  III. *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983), 388–393.
  IV. *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983), 761–765.
  V. *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983), 766–771.
- 高崎金久,『可積分系の世界 — 戸田格子とその仲間』，共立出版 (2001),
  6.4 節「離散的戸田場の方程式」

微分方程式の「差分化」

「差分化」 ＝ 「離散化」 ＝ “discretization”

$$\boxed{\text{(偏) 微分方程式}} \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} \boxed{\text{(偏) 差分方程式}}$$

ソリトン方程式の場合は，何らかの「構造」を保つように差分化する．

『差分化してどうする？』

⇒ そうすることで，他の分野と関係付けられる場合がある．

- 離散化された微分幾何学
- 何らかの代数 (ワイル群，量子群，代数群，etc.) の表現論
- 数値計算アルゴリズム