離散可積分系入門 (II)

(An introduction to discrete integrable systems)

筧 三郎 (立教大学理学部)

九州大学産業技術数理研究センター 第 9 回ワークショップ
離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

2010 年 2 月 22 日 (月)

Outline

§2.1. 2次元戸田方程式の差分化

2 次元戸田格子（戸田場）方程式に対して,

「解の構造を保つ差分化」

の 1 つを紹介する.

微分方程式の「可積分差分化」

「可積分差分化」 ＝ “Integrable Discretization”

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{微分方程式}} \arrow[r, shift left, "\text{差分化}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\text{差分方程式}} \arrow[l, shift left, "\text{連続極限}"] \arrow[d, leftrightarrow] \\ \boxed{\text{微分方程式の解}} \arrow[r, shift left, "\text{差分化}"] & \boxed{\text{差分方程式の解}} \arrow[l, shift left, "\text{連続極限}"] \end{tikzcd}$$

元の微分方程式の「解の性質」を保存するように差分化したい.

戸田方程式の差分化 (Part I の復習)

	微分方程式	差分方程式
双線形形式	$\ddot{f}_n(t)f_n(t) - \left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2$ $= f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2$	$\left[f_n(t+\delta)f_n(t-\delta) - \{f_n(t)\}^2\right]/\delta^2$ $= f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2$
1 ソリトン解	$f_n(t) = 1 + cP^{2n}e^{qt}$, $q = P - 1/P$	$f_n(t) = 1 + cP^{2n}Q^{2t/\delta}$, $Q - 1/Q = \delta\,(P - 1/P)$
非線形方程式	$\frac{d^2}{dt^2}\log\left[1 + V_n(t)\right] = \Delta_n V_n(t)$	$\Delta_{t,\delta}\log\left[1 + V_n(t)\right]$ $= \delta^{-2}\Delta_n \log\left[1 + \delta^2 V_n(t)\right]$

$f_n(t)$ と $V_n(t)$ との関係は，どちらの場合も次で与えられる：

$$V_n(t) = \frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)}{\{f_n(t)\}^2} - 1 \quad \left(\overset{\text{微分の場合}}{=} \frac{d^2}{dt^2}\log f_n(t)\right)$$

『無限・カオス・ゆらぎ』より

寺本英・広田良吾・武者利光・山口昌哉の 4 名による対談 （培風館，1985）

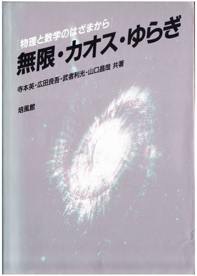
(87 ページ，広田先生が「差分化」に関する自身の研究を紹介したのを受けて，)

山口 僕の広田さんの仕事の見方は，連続の方が単純で連続の対象が 1 つあると，それに対して差分のやり方は無限にある．

広田 そうそう．それが面白いところです．

山口 その中から 非常にきれいなものを選びだされたのが広田さんの仕事です．選びだすと非常にきれいな統一的な理論がある．

広田 そこのところが面白い．ちょっとしたずれが，山口先生のカオスにいったり……．出発点のちょっとした差が．不思議でしょうがない．



戸田方程式の差分化 (Part I の復習)

	微分方程式	差分方程式
双線形形式	$\ddot{f}_n(t)f_n(t) - \left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2$ $= f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2$	$\left[f_n(t+\delta)f_n(t-\delta) - \{f_n(t)\}^2\right]/\delta^2$ $= f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2$
1 ソリトン解	$f_n(t) = 1 + cP^{2n}e^{qt}$, $q = P - 1/P$	$f_n(t) = 1 + cP^{2n}Q^{2t/\delta}$, $Q - 1/Q = \delta(P - 1/P)$
非線形方程式	$\frac{d^2}{dt^2}\log[1+V_n(t)] = \Delta_n V_n(t)$	$\Delta_{t,\delta}\log[1+V_n(t)]$ $= \delta^{-2}\Delta_n \log\left[1+\delta^2 V_n(t)\right]$

$f_n(t)$ と $V_n(t)$ との関係は，どちらの場合も次で与えられる：

$$V_n(t) = \frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)}{\{f_n(t)\}^2} - 1 \quad \left(\overset{\text{微分の場合}}{=} \frac{d^2}{dt^2}\log f_n(t)\right)$$

次は，これらの「2 次元化」を考える.

2 次元戸田（戸田場）方程式： 復習

	1 次元		2 次元
双線形	$\ddot{f}_n f_n - (\dot{f}_n)^2 = f_{n+1}f_{n-1} - (f_n)^2$	$\rightarrow$	$(\partial_x\partial_y f_n)\,f_n - (\partial_x f_n)\,(\partial_y f_n) = f_{n+1}f_{n-1} - (f_n)^2$
非線形	$\frac{d^2}{dt^2}\log\left[1+V_n\right] = V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n$	$\rightarrow$	$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log\left[1+V_n\right] = V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n$
変換	$V_n = \frac{d^2}{dt^2}\log f_n$	$\rightarrow$	$V_n = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log f_n$

これらをどのように「差分化」したらよいか？

$\Rightarrow$ 1つのアイデア：「“ソリトン解” を差分化する」

2 次元戸田（戸田場）方程式のソリトン解： 復習

Casorati 行列式解

$$\tau_n(x,y) = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-1}|$$

$$= \det \begin{bmatrix} f_n^{(1)}(x,y) & f_{n+1}^{(1)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)}(x,y) \\ f_n^{(2)}(x,y) & f_{n+1}^{(2)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)}(x,y) & f_{n+1}^{(N)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)}(x,y) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} f_{n+k}^{(1)}(x,y) \\ f_{n+k}^{(2)}(x,y) \\ \vdots \\ f_{n+k}^{(N)}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_n(x,y)}{\partial x} = f_{n+1}(x,y), \quad \frac{\partial f_n(x,y)}{\partial y} = -f_{n-1}(x,y)$$

2 次元戸田（戸田場）方程式のソリトン解： 復習

Casotari 行列式解の微分公式

$$
\begin{aligned}
\tau_n(x,y) &= |\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}-\mathbf{1}|\,,\\
\partial_x\tau_n(x,y) &= |\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}|\,,\\
-\partial_y\tau_n(x,y) &= |-\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}-\mathbf{1}|\,,\\
-\partial_x\partial_y\tau_n(x,y) &= |\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}-\mathbf{1}| + |-\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}|
\end{aligned}
$$

マヤ図形による表示

	-1	0	1	$\cdots$	$N-2$	$N-1$	N
$\lvert\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}-\mathbf{1}\rvert =$		○	○	$\cdots$	○	○	
$\lvert\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}\rvert =$		○	○	$\cdots$	○		○
$\lvert-\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}-\mathbf{1}\rvert =$	○		○	$\cdots$	○	○	
$\lvert-\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{N}-\mathbf{2},\boldsymbol{N}\rvert =$	○		○	$\cdots$	○		○

2 次元戸田（戸田場）方程式のソリトン解： 復習

Full-rank でない行列の行列式

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \ \cdots \ \boldsymbol{N-2} & \emptyset & \boldsymbol{N-1} \quad \boldsymbol{N} \\ \emptyset & \mathbf{0} & \emptyset & \mathbf{1} \ \cdots \ \boldsymbol{N-2} & \boldsymbol{N-1} \quad \boldsymbol{N} \end{vmatrix} = 0$$

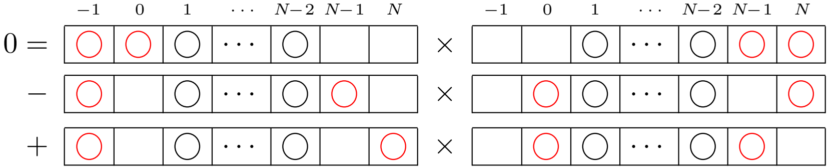
の Laplace 展開により，次が得られる：

$$\begin{array}{rccccccccccccccc} & -1 & 0 & 1 & \cdots & N{-}2 & N{-}1 & N & & -1 & 0 & 1 & \cdots & N{-}2 & N{-}1 & N \\ 0 = & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & & & \times & & & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ - & \bigcirc & & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \bigcirc & & \times & & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & & \bigcirc \\ + & \bigcirc & & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & & \bigcirc & \times & & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \bigcirc & \end{array}$$

Plücker 関係式 (のうちの 1 つ)

2 次元戸田（戸田場）方程式のソリトン解： 復習

Plücker 関係式 (のうちの 1 つ) より,



$$\Leftrightarrow \quad 0 = \tau_{n-1}\tau_{n+1} - \left(-\partial_y \tau_n\right)\left(\partial_x \tau_n\right) + \left(-\tau_n - \partial_x \partial_y \tau_n\right)\tau_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n-1}\tau_{n+1} - \tau_n^2$$

この導出過程を「差分化」したい.

Casorati 行列式解の差分化

$$\tau_n(x,y) = \begin{vmatrix} f_n^{(1)}(x,y) & f_{n+1}^{(1)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)}(x,y) \\ f_n^{(2)}(x,y) & f_{n+1}^{(2)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)}(x,y) & f_{n+1}^{(N)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)}(x,y) \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial f_n(x,y)}{\partial x} = f_{n+1}(x,y), \qquad \frac{\partial f_n(x,y)}{\partial y} = -f_{n-1}(x,y)$$

アイデア 行列式の成分の満たす線形方程式を差分化する.

$$\frac{f_n(x,y) - f_n(x-a,y)}{a} = f_{n+1}(x,y), \qquad \frac{f_n(x,y) - f_n(x,y-b)}{b} = -f_{n-1}(x,y)$$

(後退差分をとるのは「三輪変換」との関係のため)

Casorati 行列式解の差分化

行列式の成分の満たす線形差分方程式

$$\frac{f_n(x,y)-f_n(x-a,y)}{a}=f_{n+1}(x,y),\quad \frac{f_n(x,y)-f_n(x,y-b)}{b}=-f_{n-1}(x,y)$$

$$\Leftrightarrow\quad f_n(x-a,y)=f_n(x,y)-af_{n+1}(x,y),\quad f_n(x,y-b)=f_n(x,y)+bf_{n-1}(x,y)$$

$\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix} f^{(1)}_{n+k}(x,y) \\ \vdots \\ f^{(N)}_{n+k}(x,y)\end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{k}_{x+a}=\begin{pmatrix} f^{(1)}_{n+k}(x+a,y) \\ \vdots \\ f^{(N)}_{n+k}(x+a,y)\end{pmatrix}$ などと表すことにすると,

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_{x+a}-a\left(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}\right)_{x+a},\quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_{y+b}+b\left(\boldsymbol{k}-\mathbf{1}\right)_{y+b}$$

(ズレた変数のみ添字の形で明記する．)

Casorati 行列式解の差分化

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_{x+a} - a\,(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1})_{x+a}\,, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_{y+b} + b\,(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})_{y+b}$$

これらを用いて計算すると，…

$$\tau_n(x,y) = \left|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\right|,$$

$$\begin{aligned}\tau_n(x+a,y) &= \left|\boldsymbol{0}_{x+a}, \boldsymbol{1}_{x+a}, \ldots, (\boldsymbol{N-2})_{x+a}\,, (\boldsymbol{N-1})_{x+a}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, (\boldsymbol{N-1})_{x+a}\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_n(x,y+b) &= \left|\boldsymbol{0}_{y+b}, \boldsymbol{1}_{y+b}, \ldots, (\boldsymbol{N-2})_{y+b}\,, (\boldsymbol{N-1})_{y+b}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{0}_{y+b}, \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\right|\end{aligned}$$

色のついている部分は共通.

Casorati 行列式解の差分化

$$\tau_n(x,y) = \left|\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\right|,$$

$$\tau_n(x+a,y) = \left|\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, (\boldsymbol{N-1})_{x+a}\right|,$$

$$\tau_n(x,y+b) = \left|\mathbf{0}_{y+b}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}\right|$$

また，$(1+ab)\boldsymbol{k}_{x+a,y+b} = \boldsymbol{k}_{x+a} + \boldsymbol{k}_{y+b} - \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}+\mathbf{1})_{x+a} + \boldsymbol{k}_{y+b}$ を用いると，

$$\begin{aligned}(1+ab)\tau_n(x+a,y+b) &= \left|\mathbf{0}_{x+a,y+b}, \mathbf{1}_{x+a}, \ldots, (\boldsymbol{N-2})_{x+a}, (\boldsymbol{N-1})_{x+a}\right| \\ &= \left|\mathbf{0}_{y+b}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, (\boldsymbol{N-1})_{x+a}\right|\end{aligned}$$

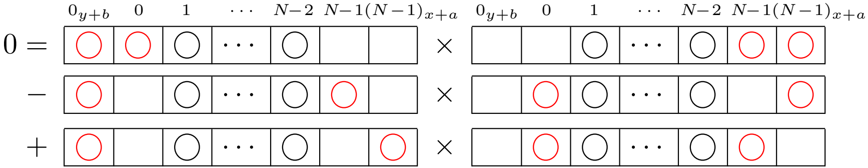
さらに，$a\,(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})_{x+a} = \boldsymbol{k}_{x+a} - \boldsymbol{k}$ より次も成り立つ．

$$a\tau_{n+1}(x+a,y) = \left|\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}, \boldsymbol{N-1}, (\boldsymbol{N-1})_{x+a}\right|,$$

$$-b\tau_{n-1}(x,y+b) = \left|\mathbf{0}_{y+b}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N-2}\right|.$$

これらにより，...

Casorati 行列式解の差分化



$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 0 = & -b\tau_{n-1}(x, y+b) \cdot a\tau_{n+1}(x+a, y) \\
& -\tau_n(x, y+b) \cdot \tau_n(x+a, y) \\
& +(1+ab)\tau_n(x+a, y+b) \cdot \tau_n(x, y)
\end{aligned}
$$

“離散２次元戸田方程式” (or “A_∞ 型離散戸田場”)

非線形方程式の導出

離散 2 次元戸田方程式 (双線形形式)

$$
\begin{aligned}
ab\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b) + \tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b) \\
- (1+ab)\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \frac{\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b) - \tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)}{\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)} \\
&= \frac{1+ab}{ab}\cdot\frac{\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y) - \tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)}{\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)} =: V_n(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} 1 + V_n(x,y) = \dfrac{\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b)}{\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)}, \\[2ex] 1 + \dfrac{ab}{1+ab}V_n(x,y) = \dfrac{\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y)}{\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)} \end{cases}
$$

非線形方程式の導出

$$\begin{cases} 1+V_n(x,y) = \dfrac{\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b)}{\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)}, \\ 1+\dfrac{ab}{1+ab}V_n(x,y) = \dfrac{\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y)}{\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\{1+V_n(x+a,y+b)\}\{1+V_n(x,y)\}}{\{1+V_n(x+a,y)\}\{1+V_n(x,y+b)\}} = \frac{\{1+\kappa V_{n+1}(x+a,y)\}\{1+\kappa V_{n-1}(x,y+b)\}}{\{1+\kappa V_n(x+a,y)\}\{1+\kappa V_n(x,y+b)\}} \qquad \left(\kappa = \frac{ab}{1+ab}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \Delta^+_{x,a}\Delta^+_{y,b}\log\{1+V_n(x,y+b)\} \\ & = \log\{1+\kappa V_{n+1}(x+a,y)\} - \log\{1+\kappa V_n(x+a,y)\} \\ & \quad - \log\{1+\kappa V_n(x,y+b)\} + \log\{1+\kappa V_{n-1}(x,y+b)\} \end{aligned}$$

離散 2 次元戸田方程式

非線形方程式の導出

$$\frac{\{1+V_n(x+a,y+b)\}\{1+V_n(x,y)\}}{\{1+V_n(x+a,y)\}\{1+V_n(x,y+b)\}} = \frac{\{1+\kappa V_{n+1}(x+a,y)\}\{1+\kappa V_{n-1}(x,y+b)\}}{\{1+\kappa V_n(x+a,y)\}\{1+\kappa V_n(x,y+b)\}} \qquad \left(\kappa = \frac{ab}{1+ab}\right)$$

また，

$$K_n(x,y) = \frac{-\kappa\{1+V_n(x,y)\}}{1+\kappa V_n(x,y)} = -\kappa\frac{\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b)}{\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y)}$$

とすれば，変数 x,y のずれ方が両辺で同じ になる：

$$\frac{K_n(x+a,y)K_n(x,y+b)}{K_n(x+a,y+b)K_n(x,y)} = \frac{\{1+K_{n+1}(x+a,y)\}\{1+K_{n-1}(x,y+b)\}}{\{1+K_n(x+a,y+b)\}\{1+K_n(x,y)\}}$$

“ゲージ不変” 離散戸田方程式

§2.2. $(1+1)$ 次元系への簡約化

離散 2 次元戸田格子（戸田場）方程式は，3 次元格子 (n, x, y) の上で定義された方程式である．ここに適当な条件を要請することで $(1+1)$ 次元の方程式を作り出す操作を，「簡約化」(reduction) という．ここでは，次の 2 つの方程式への簡約化を紹介する：

- 離散 1 次元戸田方程式
- 離散 sine-Gordon 方程式

差分戸田方程式 (1 次元) への簡約化

離散２次元戸田方程式 (双線形形式)

$$ab\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b)+\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b) \\ -(1+ab)\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y)=0$$

要請：$\tau_n(x+a,y-b)=(\text{定数})\times\tau_n(x,y)$

$$\Rightarrow \quad ab\tau_{n+1}(x,y)\tau_{n-1}(x,y)+\tau_n(x,y)^2-(1+ab)\tau_n(x+a,y)\tau_n(x-a,y)=0$$

y を固定して，$\tau_n(x,y)=\alpha^{\frac{n^2}{2}}\beta^{\frac{(x/a)^2}{2}}f_n(x)$ とすると，

$$ab\alpha f_{n+1}(x)f_{n-1}(x)+f_n(x)^2-(1+ab)\beta f_n(x+a)f_n(x-a)=0$$

α, β を適当に定めれば，次の形にできる：

$$\frac{f_n(x+a)f_n(x-a)-f_n(x)^2}{a^2}=f_{n+1}(x)f_{n-1}(x)-f_n(x)^2$$

差分戸田格子方程式 (広田，1977)

差分戸田方程式 (1 次元) への簡約化

Casorati 行列式解

$$\tau_n(x,y) = \begin{vmatrix} f_n^{(1)}(x,y) & f_{n+1}^{(1)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)}(x,y) \\ f_n^{(2)}(x,y) & f_{n+1}^{(2)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)}(x,y) & f_{n+1}^{(N)}(x,y) & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)}(x,y) \end{vmatrix},$$

成分の満たす線形差分方程式

$$\frac{f_n(x,y) - f_n(x-a,y)}{a} = f_{n+1}(x,y), \qquad \frac{f_n(x,y) - f_n(x,y-b)}{b} = -f_{n-1}(x,y)$$

さらに，

$$f_n(x+a,y-b) = (\text{定数}) \times f_n(x,y)$$

が満たされるならば，

$$\tau_n(x+a,y-b) = (\text{定数}) \times \tau_n(x,y)$$

となり，さきほどの簡約化条件を満たすことが分かる．

1 次元戸田簡約でのソリトン解

行列式の成分が満たす線形差分方程式

$$\frac{f_n(x,y)-f_n(x-a,y)}{a}=f_{n+1}(x,y),\qquad \frac{f_n(x,y)-f_n(x,y-b)}{b}=-f_{n-1}(x,y)$$

1 次元戸田簡約の条件

$$f_n(x+a,y-b)=(\text{定数})\times f_n(x,y)$$

これらを同時に満たす例 (ソリトン解)

$$f_n(x,y)=p^n\,(1-ap)^{-\frac{x}{a}}\left(1+\frac{b}{p}\right)^{-\frac{y}{b}}+c\,q^n\,(1-aq)^{-\frac{x}{a}}\left(1+\frac{b}{q}\right)^{-\frac{y}{b}}$$

において，p と q が次の関係式を満たすように選べばよい：

$$\frac{1+\frac{b}{p}}{1-ap}=\frac{1+\frac{b}{q}}{1-aq}$$

差分 sine-Gordon 方程式への簡約化

離散 2 次元戸田方程式 (双線形形式)

$$ab\tau_{n+1}(x+a,y)\tau_{n-1}(x,y+b)+\tau_n(x+a,y)\tau_n(x,y+b)$$
$$-(1+ab)\tau_n(x+a,y+b)\tau_n(x,y)=0$$

$\boxed{\text{要請：}\tau_{n+2}(x,y)=(\text{定数})\times\tau_n(x,y)}$ (n に関する 2 周期条件)

以下では，上の "(定数)" を μ とおく．

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{ab}{\mu}\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b)+\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b)\\\qquad-(1+ab)\tau_0(x+a,y+b)\tau_0(x,y)=0,\\ab\mu\,\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b)+\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b)\\\qquad-(1+ab)\tau_1(x+a,y+b)\tau_1(x,y)=0\end{cases}$$

ここで $U(x,y)=\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b)}{\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b)}$ とすると，上の双線形方程式より，

$$\frac{\tau_0(x+a,y+b)\tau_0(x,y)}{\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b)}=\frac{1+abU(x,y)}{1+ab},\qquad\frac{\tau_1(x+a,y+b)\tau_1(x,y)}{\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b)}=\frac{1+ab/U(x,y)}{1+ab}.$$

差分 sine-Gordon 方程式への簡約化

今得られた関係式：

$$\begin{cases} \dfrac{\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b)}{\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b)} = \mu U(x,y), \\ \dfrac{\tau_0(x+a,y+b)\tau_0(x,y)}{\tau_0(x+a,y)\tau_0(x,y+b)} = \dfrac{1+abU(x,y)}{1+ab}, \\ \dfrac{\tau_1(x+a,y+b)\tau_1(x,y)}{\tau_1(x+a,y)\tau_1(x,y+b)} = \dfrac{1+ab/U(x,y)}{1+ab} \end{cases}$$

これらにより，次が得られる：

$$\frac{U(x,y)U(x+a,y+b)}{U(x+a,y)U(x,y+b)} = \frac{\{1+ab/U(x+a,y)\}\{1+ab/U(x,y+b)\}}{\{1+abU(x+a,y)\}\{1+abU(x,y+b)\}}$$

差分 sine-Gordon 方程式 (広田，1977)

差分 sine-Gordon 簡約でのソリトン解

行列式の成分が満たす線形差分方程式

$$\frac{f_n(x,y)-f_n(x-a,y)}{a}=f_{n+1}(x,y),\qquad \frac{f_n(x,y)-f_n(x,y-b)}{b}=-f_{n-1}(x,y)$$

(n に関する) 2 周期条件

$$f_{n+2}(x,y)=(\text{定数})\times f_n(x,y)$$

これらを同時に満たす例 (ソリトン解)

$$f_n(x,y)=p^n\,(1-ap)^{-\frac{x}{a}}\left(1+\frac{b}{p}\right)^{-\frac{y}{b}}+c\,q^n\,(1-aq)^{-\frac{x}{a}}\left(1+\frac{b}{q}\right)^{-\frac{y}{b}}$$

において，p と q が次の関係式を満たすように選べばよい：

$$p^2=q^2\quad\Rightarrow\quad p+q=0$$

Sine-Gordon 方程式への連続極限

差分 sine-Gordon 方程式

$$\frac{U(x,y)U(x+a,y+b)}{U(x+a,y)U(x,y+b)} = \frac{\{1+ab/U(x+a,y)\}\{1+ab/U(x,y+b)\}}{\{1+abU(x+a,y)\}\{1+abU(x,y+b)\}}$$

$U(x,y) = e^{i\phi(x,y)}$, $a = b = \delta$ とおけば,

$$e^{i\{\phi(x+\delta,y+\delta)-\phi(x+\delta,y)-\phi(x,y+\delta)+\phi(x,y)\}} = \frac{\left\{1+\delta^2 e^{-i\phi(x+\delta,y)}\right\}\left\{1+\delta^2 e^{-i\phi(x,y+\delta)}\right\}}{\left\{1+\delta^2 e^{i\phi(x+\delta,y)}\right\}\left\{1+\delta^2 e^{i\phi(x,y+\delta)}\right\}}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ &\frac{\phi(x+\delta,y+\delta)-\phi(x+\delta,y)-\phi(x,y+\delta)+\phi(x,y)}{\delta^2}\\ &= \frac{1}{i}\left[\frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2 e^{-i\phi(x+\delta,y)}\right\} - \frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2 e^{i\phi(x+\delta,y)}\right\}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2 e^{-i\phi(x,y+\delta)}\right\} - \frac{1}{\delta^2}\log\left\{1+\delta^2 e^{i\phi(x,y+\delta)}\right\}\right]\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\delta\to 0} \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi(x,y) = \frac{2}{i}\left[e^{-\phi(x,y)} - e^{\phi(x,y)}\right] = -4\sin\phi(x,y) \quad \text{(sine-Gordon 方程式)}$$

Part II のまとめ

戸田方程式の差分化に関連して，次のトピックを解説した：

- 「行列式解の差分化」からの離散 2 次元戸田方程式の「導出」
- 離散 2 次元戸田方程式の簡約化 (reduction)
  - 離散 1 次元戸田方程式
  - 離散 sine-Gordon 方程式