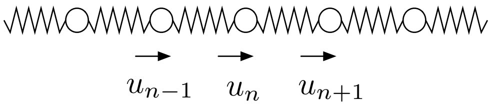
戸田格子

新しい研究のゆりかご

九州大学大学院数理学研究院 梶原 健司

1　戸田格子

戸田格子とは 1967 年に発表された，ある非線形相互作用を行うバネでつながれた質点を記述する古典力学の模型である [1, 2, 3].



図において質点の質量を m，n 番目の質点の平衡点からの (右方向を正とした) 変位を u_n とする．相対変位すなわちバネの伸びは $r_n = u_n - u_{n-1}$ である．一般に伸び r に対するバネのポテンシャルエネルギーを $\phi(r)$ とすると，ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \phi'(r_{n+1}) - \phi'(r_n) \tag{1}$$

となる．フックの法則に従うバネのポテンシャルは κ を正の定数として $\phi(r) = \frac{\kappa r^2}{2}$ で与えられ，運動方程式は

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \kappa(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \tag{2}$$

という線形方程式になる．当時日本では格子振動の研究グループが活発に活動していたが，非線形波動に厳密解などないという考えが一般的だったという．その流れの中で，戸田はフォードによる非線形相互作用をする 3 粒子系の数値実験結果に触発されて厳密に解ける非線形格子を探し求め，a, b をパラメータとして次のような指数関数型のポテンシャル (戸田ポテンシャル)

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar \quad (ab > 0) \tag{3}$$

を考案した．戸田ポテンシャルでつながれたバネ-質点系を戸田格子，対応する運動方程式

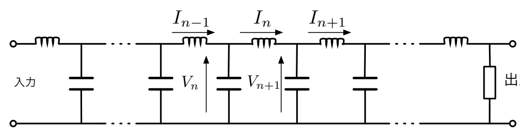
$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = -ae^{-b(u_{n+1}-u_n)} + ae^{-b(u_n-u_{n-1})} \tag{4}$$

もしくは適当なスケール変換をした後に得られる

$$\frac{d^2q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \tag{5}$$

を戸田格子方程式と呼ぶ．戸田は 1967 年 5 月の最初の論文において (4) の楕円関数で表される厳密解を構成している [4]．一方，1955 年にフェルミ・パスタ・ウラムは格子の熱伝導の問題を考察するため $\phi(r) = \kappa(\frac{r^2}{2} + \frac{\alpha r^3}{3})$ を初めとするいくつかの非線形格子に対して計算機実験を行った．1965 年にはザブスキーとクラスカルがその結果を解析するために連続極限を取ってコルテヴェーグ・ドフリース (KdV) 方程式を導出し，同時にその計算機実験から粒子的性質を持つ孤立波「ソリトン」を発見した．それを知った戸田は，続いて 1967 年 9 月に発表された第 2 論文で孤立波解を構成し，巧妙な連続極限で戸田格子方程式とその孤立波解が KdV 方程式とそのソリトン解に帰着することを示した [5]．なお，この年にはガードナー・グリーン・クラスカル・ミウラにより逆散乱法による KdV 方程式の初期値問題の厳密解法も発表されている．

1969 年には 2 個の孤立波の相互作用を記述する厳密解 (2-ソリトン解) が求められ，戸田格子の孤立波がソリトンであることが理論的に確立された [6].



広田と鈴木はソリトンを暗号通信に応用したいという動機から，1970 年に戸田格子を上の図のような電気回路として実現した [7]．ソリトンなどの非線形波動現象が，計算機実験の上だけでなく現実の現象として観測されたことは意義が大きいと思われる．回路方程式は適当なスケール変換の後 (5) と同値な

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \tag{6}$$

で表され，q_n と V_n は

$$V_n = e^{q_n - q_{n+1}} - 1 \tag{7}$$

で結びついている．非線形性はキャパシタの静電容量が電圧に依存することに起因するが，市販されているキャ

パシタの特性が，ある電圧の範囲で上の場合でうまく近似できるのがミソである [8][*1]．さらに周期系に対する数値計算に示唆され，1974 年にはエノンとフラシュカによって戸田格子の可積分性が証明された [9]．その後，戸田格子の理論は数学的に整備され，1970 年代後半から可積分系の理論全体の急速な発展と共に研究が進んで行くことになる．

2　戸田格子の性質

戸田格子はさまざまなよい性質を備えているが，ここでは基本的な 3 つの性質について述べよう．

■厳密解　第一に，戸田格子はよい構造をもった多様な厳密解を持つ．ここでは 3 種類の解を紹介する．

(i) ソリトン解．まず戸田格子方程式には κ, ω, δ を定数として次のような解

$$\begin{gathered} V_n = \omega^2 \mathrm{sech}^2(\kappa n + \sigma\omega t + \delta), \\ \sigma = \pm 1, \quad \omega = \sinh\kappa \end{gathered} \tag{8}$$

が知られており，これは振幅 $\omega^2 = \sinh^2\kappa$，速度 $(\pm)\sinh\kappa/\kappa$ で進む孤立波を表す．さらに，戸田格子方程式は N 個の孤立波の相互作用を記述する厳密解 (N-ソリトン解) を持ち，具体的には

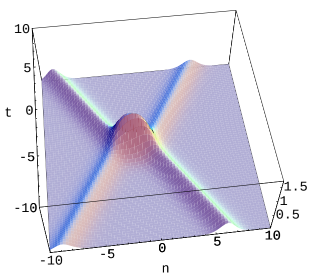
$$V_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} - 1, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\tau_n = 1 + e^{2\eta_1}, && (N{=}1) \\ &\tau_n = 1 + e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2} + A_{12}e^{2(\eta_1+\eta_2)} && (N{=}2) \end{aligned} \tag{10}$$

などと表される．ただし，

$$\begin{gathered} \eta_i = \kappa_i n + \sigma_i\omega_i t + \delta_i, \\ \sigma_i = \pm 1,\ \omega_i = \sinh\kappa_i\ (i = 1, 2) \end{gathered} \tag{11}$$

であり，A_{12} は κ_1, κ_2 で表されるある定数である．



[*1] 広田によると，実際の回路の制作に当たってはコイルの品質の管理と反射波が出ないようにするために多大の工夫を要したという．

図は $N = 2$ の場合の解の挙動を示したものである．孤立波は相互作用の際に位置がずれるだけで速度や波高が変化せず「ソリトン」としての性質を持っていることが見て取れる．なお，(9) を (6) に代入すると，τ_n の満たす 2 次の方程式

$$\tau_n''\tau_n - (\tau_n')^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 \tag{12}$$

が得られる．広田は暗号通信への応用のために 3-ソリトン解を構成する必要から，(12) に対して摂動法のテクニックを用い，ソリトン解を初等計算で組織的に構成する方法を開発した (広田の方法 [10])．(12) とその従属変数 τ_n はそれぞれ双線形形式と τ 関数と呼ばれ，現在では可積分系の理論の根幹をなすオブジェクトであることがわかっている．

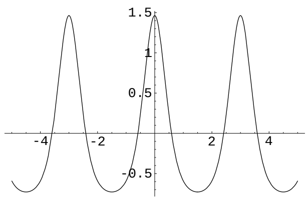
(ii) 周期解．戸田が最初の論文で発表した解は楕円関数で表される周期解であった．

$$V_n = (2K\nu)^2 \left[\mathrm{dn}^2 \left\{ 2\left(\frac{n}{\lambda} \pm \nu t\right) K \right\} - \frac{E}{K} \right] \tag{13}$$

ただし，定数 λ と ν は分散関係

$$2K\nu = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{sn}^2(2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K}}} \tag{14}$$

で結ばれており， dn, sn はそれぞれ Jacobi の dn, sn 関数，K, E は母数を k とするそれぞれ第 1 種，第 2 種の完全楕円積分である．楕円関数解 (13) のグラフは図のようになる．一つ一つのパルスは (8) で与えられるソリトンで，周期解はそれを周期分ずらしながら無限個重ね合わせたものだと理解できる．



なお，周期解で τ 関数の役割を果たすのは楕円テータ関数であり，より種数の高いリーマン面上のテータ関数で表される解も知られている [1, 2]．

(iii) 分子解．分子解と呼ばれる解は半無限もしくは有限の格子で重要な役割を果たす [11]．境界条件として $V_0 = 0$ を課し，$n \geq 0$ とする．このとき，(9) の下で

$$\tau_n = e^{-\frac{t^2}{2}} \ \det\left(\frac{d^{i+j-2}}{dt^{i+j-2}} f(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n} \tag{15}$$

が戸田格子方程式の解を与える．ここで $f(t)$ は任意関数，また $\tau_0=1$, $\tau_n=0$ $(n<0)$ とする．また，右端でも境界条件 $V_M=0$ を課して有限格子にした場合は，$f(t)$ を指数関数の M 個の和に取ればよいことが知られている．ソリトン解や周期解は主に物理の文脈で重要であるが，分子解は数学・数理工学の文脈で重要であることが多い．例えばパンルヴェ方程式の理論での役割は本特集の筧氏の記事を参照していただきたい．

■完全可積分性　第二に，戸田格子方程式は古典力学で記述される系であり，ハミルトニアンは

$$H=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2}p_n^2+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{q_n-q_{n+1}}-1\right) \tag{16}$$

で与えられる．特に周期系や有限系は有限個の質点からなる系であり，従って古典力学で培われた多くの概念や手法をそのまま適用できることは大きな利点である．リュービル・アーノルドの定理によれば，自由度 N のハミルトン系がポアソン括弧について可換で独立な N 個の保存量を持てば，その系の初期値問題は求積法 (四則演算・微分・不定積分・逆関数を取る操作・微分を含まない方程式を解く操作の有限回の組み合わせ) によって解けることが保証され，そのような系は「完全可積分系」と呼ばれる [12]．もちろん一般のハミルトン系は十分な数の保存量を持たないので完全可積分系ではなく，求積法で解けることもない．戸田格子はある種の剛体の回転運動を記述するコワレフスカヤのコマ以来，約 80 年ぶりに見いだされた完全可積分系であった．無限格子上の戸田格子やさまざまなソリトン方程式などは完全可積分系を自然に無限自由度系に拡張したと見なすことができる．同様の性質を持った系は数多く (無限個!) 見つかっており，「可積分系」と総称される．

■ラックスペア　完全可積分性を保証するのがラックスペアと呼ばれる行列 (線形作用素) の対である．今，$a_n=\frac{1}{2}e^{\frac{q_n-q_{n+1}}{2}}$，$b_n=\frac{1}{2}\frac{dq_n}{dt}$ とおき，N 個の質点からなる周期戸田格子

$$\begin{cases}\dfrac{da_n}{dt}=a_n(b_n-b_{n+1}) & \quad a_{n+N}=a_n\\[2mm] \dfrac{db_n}{dt}=2(a_{n-1}^2-a_n^2) & \quad b_{n+N}=b_n\end{cases} \tag{17}$$

を考える．これに対して $N\times N$ 対称行列 L と反対称行列 B をそれぞれ

$$L=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & a_N\\ a_1 & b_2 & a_2 & \emptyset & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \emptyset & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1}\\ a_N & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_N\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \cdots & a_N\\ a_1 & 0 & -a_2 & \emptyset & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \emptyset & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1}\\ -a_N & \cdots & 0 & a_{N-1} & 0\end{pmatrix} \tag{19}$$

で定義すると，

$$\frac{dL}{dt}=BL-LB=[B,L] \tag{20}$$

が (17) を与える．行列 L と B の対をラックスペア，(20) をラックス方程式とそれぞれ呼ぶ．方程式をこの形式で表現する御利益の一つは保存量が簡単に求まることであり，実際に簡単な計算で $\mathrm{Tr}\ L^k$ $(k=1,\ldots,N)$ の時間微分が 0 すなわち保存量であることがわかる．これによって戸田格子はリュービル・アーノルドの意味で完全可積分系であることが示されるのである．なお，保存量のポアソン括弧に関する可換性の背景には古典 r 行列があり，量子化されて量子群へつながることを注意しておきたい [13]．また，ラックス方程式は次の固有値問題と密接に関連する．

$$L\varphi=\lambda\varphi,\quad \frac{d\varphi}{dt}=B\varphi,\quad \varphi={}^t(\varphi_1,\cdots,\varphi_N) \tag{21}$$

この固有値問題に対して，固有値 λ が時間に依存しないことと a_n, b_n がラックス方程式を通じて戸田格子方程式を満たすことは同値であることが示される．こうして戸田格子方程式は線形固有値問題の「固有値保存変形」として定式化され，初期値問題を固有値や固有関数の解析的・幾何学的性質を駆使して厳密に解くことができる．このような手法は「逆散乱法」と総称される．

3　戸田格子の拡張

　戸田格子には実にさまざまな拡張がなされているが，ここでは二つの拡張を紹介したい．

■2 次元戸田格子と階層構造 [14]　レズノフとサベリエフは (5) を拡張して 2 次元戸田格子もしくは戸田場と呼ばれる方程式

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial z \partial w} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \tag{22}$$

もしくは

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \log(1+V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \tag{23}$$

を考察した．(22), (23) において $z = \frac{t+s}{2}$, $w = \frac{t-s}{2}$ とおき，s 依存性を無視すれば (5), (6) がそれぞれ得られる．戸田格子以外にも，例えば 2 周期性 $q_n = q_{n+2}$ を課すことによって微分幾何学で重要な役割を果たすサイン・ゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial w} = -4 \sin v, \quad v = i(q_0 - q_1) \tag{24}$$

が得られる．このように，2 次元戸田格子方程式は可積分系の理論で一種のマスター方程式として特別な位置を占めている．背後の数理構造の一端は，無限格子の場合，解の次のような美しい行列式表示に見ることができる．

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad V_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} - 1, \tag{25}$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial z} = f_{n+1}^{(k)}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial w} = -f_{n-1}^{(k)} \tag{27}$$

特に $p_k, q_k, \xi_{k0}, \eta_{k0}$ $(k = 1, \cdots, N)$ を定数とし $f_n^{(k)}$ を

$$\begin{aligned} &f_n^{(k)} = p_k^n\ e^{\xi_k} + q_k^n\ e^{\eta_k}, \\ &\xi_k = p_k z - \frac{w}{p_k} + \xi_{k0},\ \eta_k = q_k z - \frac{w}{q_k} + \eta_{k0} \end{aligned} \tag{28}$$

と取ればソリトン解が得られる．解の表示から，無限個の独立変数 $x = (x_1, x_2, \cdots)$, $y = (y_1, y_2, \cdots)$ を

$$\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x_i} = f_{n+i}^{(k)}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial y_i} = -f_{n-i}^{(k)} \tag{29}$$

で導入するのは自然であると考えられる．このとき，τ_n は高次の独立変数 x_i, y_i の微分を含む無限個の双線形方程式を同時に満足することが示される．上野と高崎は 1983 年に (22), (23) をもっとも簡単な場合として含む無限個の可積分な微分差分方程式の階層を構成した．可積分系の統一的な階層構造理論は 1981 年，佐藤によってカドムツェフ・ペトビアシュビリ (KP) 方程式を含む階層について初めて構築された．その後多くの階層が同様に構成されたが，それらの理論は佐藤理論もしくは KP 理論と総称される．2 次元戸田格子階層はその重要な一角を担う階層である．なお，(23) は曲面の変換を表す方程式として 19 世紀にダルブーによって導出されていた．戸田格子の微分幾何学的側面に関しては本特集の井ノ口氏の記事を参照していただきたい．

■離散化・超離散化 [11, 15]　広田は高精度で安定な数値計算スキームの必要から，1977 年に戸田格子方程式の性質を保存したまま時刻 t を離散化して差分方程式を構成することに成功した．戸田格子方程式の表示として (6) で $V_n = e^{R_n} - 1$ とした

$$\frac{d^2 R_n}{dt^2} = e^{R_{n+1}} + e^{R_{n-1}} - 2e^{R_n} \tag{30}$$

を取り上げる．離散化された方程式の一つの形は，時刻 t，格子番号 n での関数 R の値を R_n^t と書けば，δ を時刻 t に関する格子間隔を表す定数として

$$\begin{aligned} &R_n^{t+1} + R_n^{t-1} - 2R_n^t = F_{n+1}^t + F_{n-1}^t - 2F_n^t, \\ &F_n^t = \log(1 + \delta^2 e^{R_n^t}) \end{aligned} \tag{31}$$

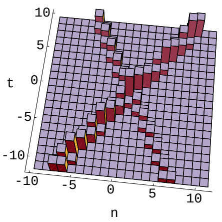
で与えられる (離散時間戸田格子方程式)．ソリトン解や周期解，分子解などの解も同様に存在するのは言うまでもない．例えば 1-ソリトン解は

$$\begin{aligned} &R_n = \log \frac{f_{n+1}^t f_{n+1}^t}{f_n^2},\ f_n^t = 1 + e^{2(Pn + \Omega t + \xi_0)}, \\ &\sinh \Omega = \pm \delta \sinh P \end{aligned} \tag{32}$$

である．$t\delta$ を改めて t とおけば，$\delta \to 0$ の極限で (31) は (30) に帰着し，解のレベルでも極限で対応することがわかる．驚くべきことに，離散時間戸田格子方程式はさらに従属変数まで離散化して，その性質を保ちながら整数値を取る力学系にすることすらできるのである．まず，「箱玉系」と呼ばれるソリトンを記述するセルオートマトンモデルが 1990 年に高橋・薩摩によって提出されたが，ソリトン方程式との関連がわからなかった．1995 年に高橋・松木平は時間に関して 2 階で戸田格子に似たセルオートマトンモデルを計算機実験を駆使して探し

$$\begin{aligned} &X_n^{t+1} + X_n^{t-1} - 2X_n^t = G_{n+1}^t + G_{n-1}^t - 2G_n^t, \\ &G_n^t = \max(0, X_n^t - L) \end{aligned} \tag{33}$$

を得た．L を整数に選び，初期値 X_n^0, X_n^1 を整数値に取っておけば，任意の t について X_n^t は整数となる．解は下の図のように戸田格子のソリトンによく似ている．



その後，(31) と (33) を比較してそれらが変数変換 $R_n^t = \frac{X_n^t}{\epsilon}$, $\delta = e^{-\frac{L}{2\epsilon}}$ と極限の公式

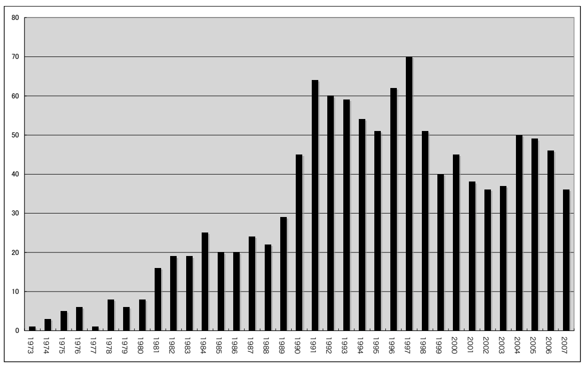
$$\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon \log \left(e^{\frac{X}{\epsilon}} + e^{\frac{Y}{\epsilon}} \right) = \max(X, Y), \ X, Y \in \mathbb{R} \quad (34)$$

によって対応していることが判明した．重要なことは，(31) のソリトン解が同じ極限で (33) のソリトン解に移行することである．公式 (34) を用いた，差分方程式の従属変数の組織的な離散化の手続きを超離散化と呼ぶ．超離散化は理論面では表現論や「トロピカル幾何学」との関連で，また応用面では「渋滞学」への応用などでホットな話題である．本特集の西成氏と金井氏の記事では後者の話題が解説されているので参照していただきたい．

4 「ゆりかご」としての戸田格子

戸田格子とそれにまつわる研究の経緯や成果を振り返ってみると，異なる立場や分野の間に理想的な相互作用があったという感を強くする．戸田格子それ自身や広田の方法，離散化・超離散化の発見は，既知の深い理論を駆使したというよりは，むしろ数理的・物理的現象に重きをおいた「遊び」や「試行錯誤」の末になされたものである．発見には深く広い数理的知識の上に培われた強い個性と一種の嗅覚とも言うべき研ぎ澄まされた物理的・工学的直感が本質的な役割を果たしている．発見の経緯は後から学ぶ者の想像としばしば逆で，大変印象的である．一方で，物理や工学的な動機や直感に助けられて見つかった材料が，豊かな数学的世界観を持つ数学者によって本質を見抜かれ，抽象化され，整理されて数学のまな板に乗ったとき，数学の発揮するパワーは凄まじい．隠れたからくりが一気に明らかになり，可能な限り一般化される．そうして他分野との関連が見いだされ，相互作用によってお互いの研究がまた進むことになる．佐藤らいわゆる京都スクールによる壮大な階層構造理論はまさにその典型であろう．例えば，独立変数を無限個導入し，無限個の方程式の階層を全体としてとらえるというアイデアは，まさに数学の抽象性と自由さによるもので，現実の物理や工学の現象だけに拘っていてはなかなかできないように思う．

さて，下の図は科学文献サービス Web of Science のデータベース "Science Citation Index Expanded" 所収の論文でタイトルに「Toda」という単語が含まれているものの本数を出版年別にまとめたものである[*2]．全く驚くべきことだが，戸田格子が発見後 40 年経っても研究され続けていることは一目瞭然である．さまざまな新しいアイデアが戸田格子を元に，また戸田格子を触媒として生み出され，戸田格子でテストされ，拡張されてきた．戸田格子はいわば新しい研究を育てるゆりかごとも言うべき役割を果たしているのである．ところで，グラフには論文数が急増した年がいくつかあるが，何があったのだろうか．読者の議論の楽しみに残しておきたい．



本稿では戸田格子にまつわる重要な話題，例えばロシアのグループによる戸田格子のリー代数的観点からの拡張，また数値解析アルゴリズムとの関係と新しいアルゴリズム開発の話題，ランダム行列などを通じた数学諸分野との関連，さらに戸田格子の量子化に関連する話題など，多くを割愛せざるを得なかったのは残念である．興味を持たれた方は是非文献を調べてみていただきたい．戸田先生は 90 才になられた今も精力的に執筆活動に励んでおられる．誕生後 40 年を経て，戸田格子はますます元気である．

[*2] 戸田格子とは関係なさそうなごく少数の論文が混ざっているが，誤差と見なして敢えてそのままにした．

参考文献

[1] 戸田盛和, 非線形格子力学 (増補版), 岩波書店 (1987)

[2] 戸田盛和，非線形波動とソリトン (新版)，日本評論社 (2000)

[3] 戸田盛和，波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店 (1995)

[4] Morikazu Toda, "*Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction*", J. Phys. Soc. Jpn. **22**(1967) 431-436

[5] Morikazu Toda, "*Wave Propagation in Anharmonic Lattices*", J. Phys. Soc. Jpn. **23**(1967) 501-506.

[6] Morikazu Toda, "*Mechanics and Statistical Mechanics of Nonlinear Chains*", J. Phys. Soc. Jpn. Suppl. **26**(1969) 235-237

[7] Ryogo Hirota and Kimio Suzuki, "*Studies on Lattice Solitons by Using Electrical Circuit*", J. Phys. Soc. Jpn. **28**(1970) 1366-1367; "*Theoretical and Experimental Studies of Lattice Solitons in Nonlinear Lumped Networks*", Proc. IEEE **61**(1973) 1483-1491

[8] 渡辺慎介，ソリトン物理入門，培風館 (1985)

[9] M. Hénon, *Integrals of the Toda lattice*, Phys. Rev. B **9**(1974) 1921-1924; H. Flaschka, "*The Toda lattice. II. Existence of integrals*", Phys. Rev. B **9**(1974) 1924-1925.

[10] 広田良吾，直接法によるソリトンの数理，岩波書店 (1992)

[11] 中村佳正 (編)，可積分系の応用数理，裳華房 (2000)

[12] 大貫義郎・吉田春夫，力学，岩波書店 (1994)

[13] Michio Jimbo, "*Quantum R matrix for the generalized Toda system*", Comm. Math. Phys. **102** (1986) 537–547.

[14] 高崎金久，可積分系の世界—戸田格子とその仲間，共立出版 (2001)

[15] 広田良吾・高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版 (2003)