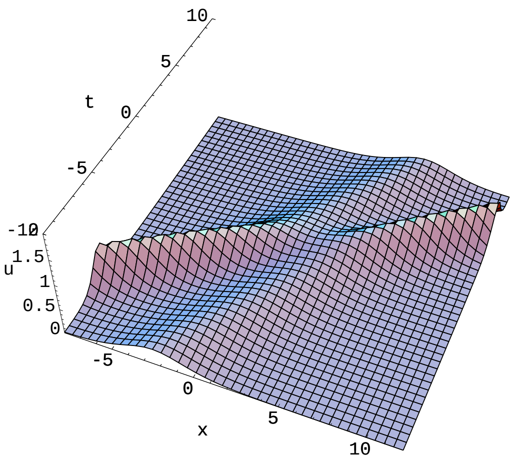
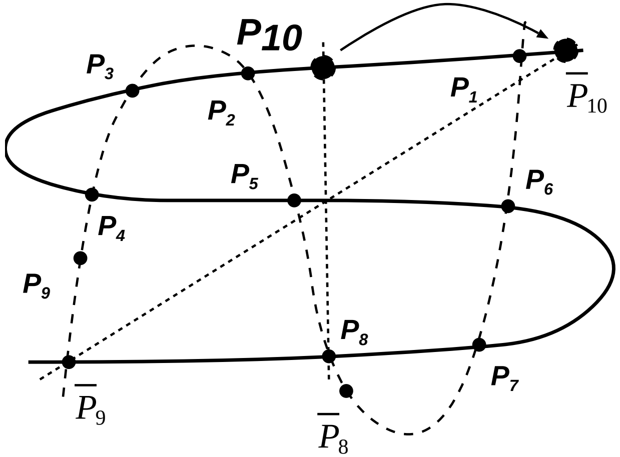
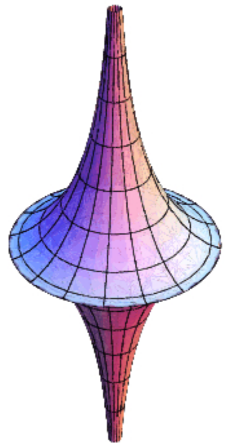
セミナー紹介：可積分系

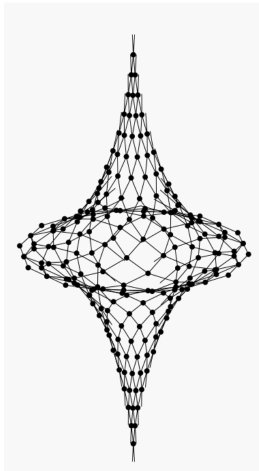
梶原 健司 (理学部分室)

2008.8.1　　数理学講究I 説明会









可積分系とは：明確な定義はない.

通常「解けない」「うまくいかない」ことが，背後の数理的からくりによって奇跡的に解けたりうまくいったりする場合，その系を「可積分系」と呼ぶことが多い.

✓ 古典力学の完全可積分系 (Liouville-Arnoldの定理)

自由度nのHamilton系に独立なn個の保存量 → 求積法で初期値問題が解ける

※　求積法：四則演算・微分積分・逆函数・微積分を含まない方程式を解くこと

✓ ソリトン系　(非線形波動「ソリトン」を記述する偏微分方程式のファミリー)

本来そう簡単に解けないはずの非線形偏微分方程式の初期値問題が厳密に解ける

✓ パンルヴェ系 (ある非線形常微分方程式のファミリー：解は特殊函数の一般化)

本来そう簡単にできないはずの「解けない」ことの証明ができてしまう.

✓ 可解格子模型・共形場理論など

本来そう簡単に求まらないはずの物理量（相関函数など）が厳密に求まる.

背後の奇跡的な数理的からくり:「無限の対称性」に支えられた「無限次元の空間」

解から見る可積分系の数理：(離散)パンルヴェ II 方程式の超幾何解

パンルヴェ II 方程式

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + 2ty + \alpha}$$

リッカチ方程式

$$y' = a(t)\,y^2 + b(t)\,y + c(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + t \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

線形化: エアリの微分方程式

$$\boxed{y = \frac{d}{dt}\log f, \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = -tf}$$

解: エアリ函数の対数微分

解から見る可積分系の数理：(離散)パンルヴェ II 方程式の超幾何解

パンルヴェ II 方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + 2ty + \alpha$$

離散パンルヴェ II 方程式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an+b)x_n + c}{1 - x_n^2}$$

リッカチ方程式

$$y' = a(t)\, y^2 + b(t)\, y + c(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + t \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

線形化: エアリの微分方程式

$$y = \frac{d}{dt}\log f, \qquad \frac{d^2 f}{dt^2} = -tf$$

解: エアリ函数の対数微分

解から見る可積分系の数理：(離散)パンルヴェ II 方程式の超幾何解

パンルヴェ II 方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + 2ty + \alpha$$

離散パンルヴェ II 方程式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an+b)x_n + c}{1 - x_n^2}$$

リッカチ方程式

$$y' = a(t)\,y^2 + b(t)\,y + c(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + t \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

離散リッカチ方程式

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{c_n x_n + d_n}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n - (pn+q)}{1 + x_n} \longrightarrow \begin{array}{l} a = 2p, \\ b = -p + 2q + 2, \\ c = -p \end{array}$$

線形化: エアリの微分方程式

$$y = \frac{d}{dt}\log f, \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = -tf$$

解: エアリ函数の対数微分

解から見る可積分系の数理：(離散)パンルヴェ II 方程式の超幾何解

パンルヴェ II 方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + 2ty + \alpha$$

リッカチ方程式

$$y' = a(t)\, y^2 + b(t)\, y + c(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + t \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

線形化: エアリの微分方程式

$$y = \frac{d}{dt}\log f, \qquad \frac{d^2 f}{dt^2} = -tf$$

解: エアリ函数の対数微分

離散パンルヴェ II 方程式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an+b)x_n + c}{1 - x_n^2}$$

離散リッカチ方程式

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{c_n x_n + d_n}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n - (pn+q)}{1 + x_n} \longrightarrow \begin{array}{l} a = 2p, \\ b = -p + 2q + 2, \\ c = -p \end{array}$$

線形化: エアリの微分方程式の「離散類似」

$$x_n = \frac{g_{n+1} - g_n}{g_n}, \qquad g_{n+2} - 2g_{n+1} + g_n = -(pn+q)g_n$$

解: 放物柱函数(エアリ函数の離散類似)

解の行列式構造:

パンルヴェ II 方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + 2ty + \alpha$$

$$y = \frac{d}{dt}\log\frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}, \qquad \alpha = -\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

(2方向) ロンスキー行列式

$$\tau_N = \begin{vmatrix} f & f' & \cdots & f^{(N-1)} \\ f' & f'' & \cdots & f^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f^{(N-1)} & f^{(N)} & \cdots & f^{(2N-2)} \end{vmatrix}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -tf$$

離散パンルヴェ II 方程式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an+b)x_n + c}{1 - x_n^2}$$

$$x_n = \frac{\tau_{N+1}^{n+1}\tau_N^n}{\tau_{N+1}^n\tau_N^{n+1}} - 1, \qquad \begin{aligned} a &= 2p, \\ b &= (2N-1)p + 2(q+1), \\ c &= -(2N+1)p \end{aligned}$$

(2方向) カソラチ行列式

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{n+N-1} \\ g_{n+2} & g_{n+3} & \cdots & g_{n+N+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n+2N-2} & g_{n+2N-1} & \cdots & g_{n+3N-3} \end{vmatrix}$$

$$g_{n+2} - 2g_{n+1} + g_n = -(pn+q)g_n$$

有理函数解： Schur 多項式 = 一般線形群の指標

「可積分系の理論」では何をどう研究しているのか：

✓ 構造がよさそうだがよくわからない対象（方程式）はたくさんある!

物理学・工学・確率論・組合わせ論・微分幾何・代数幾何…

✓ 背後の数理を見いだす

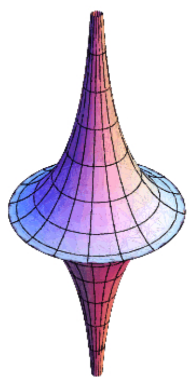
方程式ごとに小さな事実を積み上げる・典型的な「理論」を拡張・独自に理論を構築…

離散パンルヴェ系の場合：

解を作る→解の構造を調べる→対称性→幾何学的構造→包括的な理論→より複雑な解

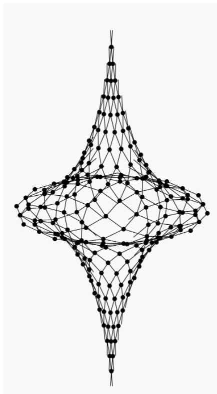
✓ 数理の展開　離散化・超離散化・量子可積分系

応用：非線形波動・数値解析アルゴリズム・渋滞学・離散微分幾何 (New!)



サイン・ゴルドン方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial u \partial v} = \sin\theta$$



離散サイン・ゴルドン方程式

$$\sin\frac{\theta_{v+\delta}^{u+\epsilon} - \theta_{v}^{u+\epsilon} - \theta_{v+\delta}^{u} + \theta_{v}^{u}}{4} = \frac{\epsilon\delta}{4}\sin\frac{\theta_{v+\delta}^{u+\epsilon} + \theta_{v}^{u+\epsilon} + \theta_{v+\delta}^{u} + \theta_{v}^{u}}{4}$$

可積分系への招待:「解く楽しみ」

- ☞ 初等的で具体的な数学的事実を積み上げながら登っていける．研究に入りやすい．
- ☞ その代わり「発見の才」は必要．（あるかどうかはやってみないとわからない）
- ☞ さまざまな分野の交差点．いろいろな学問的背景を持っていてもそれを生かせる．
- ☞ 日本は世界の研究センターの一つ．数学会にも「無限可積分系」セッション
- ☞ 九大数理はアクティブな拠点の一つ．(「九州可積分系セミナー」)

指導方針

- ☞ 実戦で鍛える：早い時期から論文と具体的な研究課題で実践的に力をつける．
- ☞ 修士課程修了時に論文誌に掲載される論文が書けるレベルに．学部レベルでもなるべく新しい計算を(本人の好みによる).
- ☞ 本人の志向に合わせて純粋系にも応用系にも向けて柔軟に指導する．

参考資料 (http://gandalf.math.kyushu-u.ac.jp/ (公開講座の資料など))

- ☛ 特集「戸田格子40年」，数学セミナー2008年3月号
- ☛「ソリトンと逆散乱法：歴史的視点から」，数学セミナー2008年8,9月号
- ☛ 数学セミナー編集部編:「数学ガイダンスhyper」，日本評論社(2005)