



Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University



可積分系入門

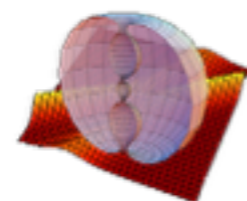
—戸田格子を中心として—

梶原 健司 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)

Kenji Kajiwara (IMI, Kyushu University)

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル2014

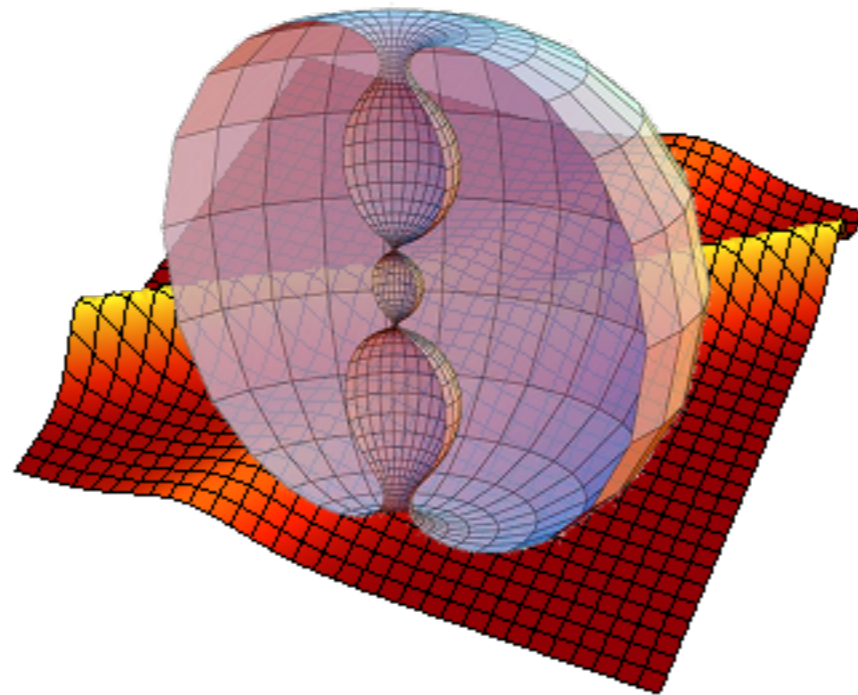
2014年2月22日 九州大学伊都キャンパス



DISDDG2014

第1章

戸田格子から始まる可積分系の第1歩



戸田 盛和 (1917~2010)

液体論・非線形波動・非線形格子振動
そして戸田格子

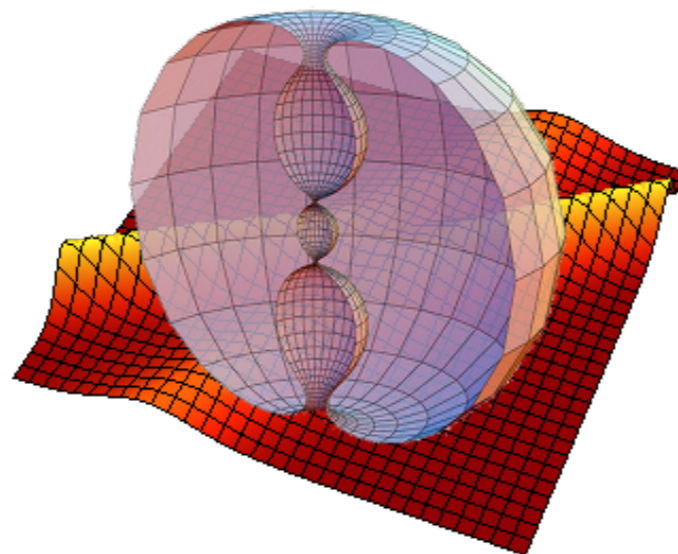


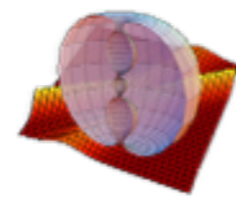
お祖父様は維新で活躍した尾崎三良

内容とキーワード

戸田格子方程式とその基本的な性質

- 完全可積分系
- Lax 形式：線形方程式系の両立条件としての定式化
- Bäcklund 変換
- 広田の方法：厳密解を作る
- ソリトン解





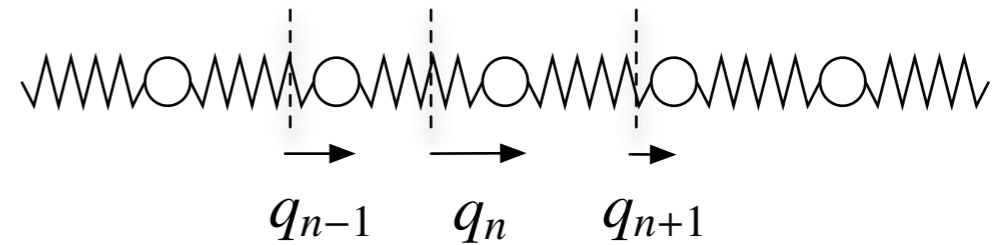
戸田格子方程式

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

相対変位：

$$r_n = q_n - q_{n-1}$$

ポテンシャルエネルギー： $\phi(r) \implies$ Force $-\phi'(r)$



運動方程式：

$$m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\phi'(r_n) + \phi'(r_{n+1})$$

● フックの法則：

$$\phi(r) = \frac{1}{2} \kappa r^2 \quad \text{Force: } -\phi'(r) = -\kappa r$$

Equation of motion:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\kappa(q_n - q_{n-1}) + \kappa(q_{n+1} - q_n) = \kappa(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n)$$

● 戸田ポテンシャル

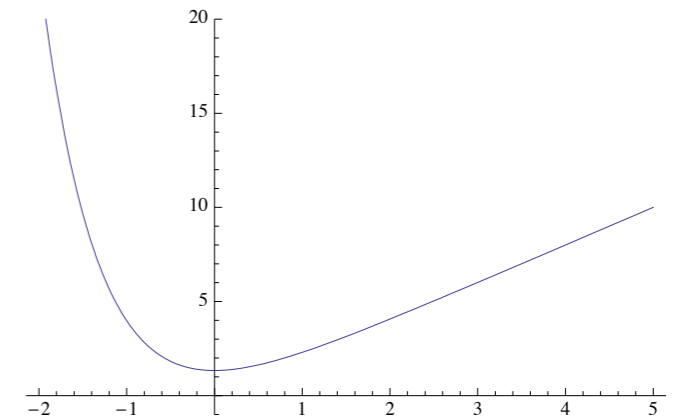
$$\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar \quad a, b > 0 \quad \text{Force: } -\phi'(r) = a(e^{-br} - 1)$$

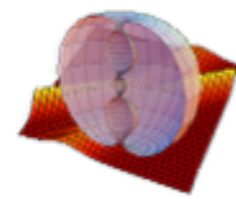
Rem.

$$r \sim 0 : \phi(r) \sim \frac{a}{b} + \frac{ab}{2} r^2 \quad \text{フックの法則}$$

運動方程式

$$m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = a \left[e^{-b(q_n - q_{n-1})} - e^{-b(q_{n+1} - q_n)} \right]$$



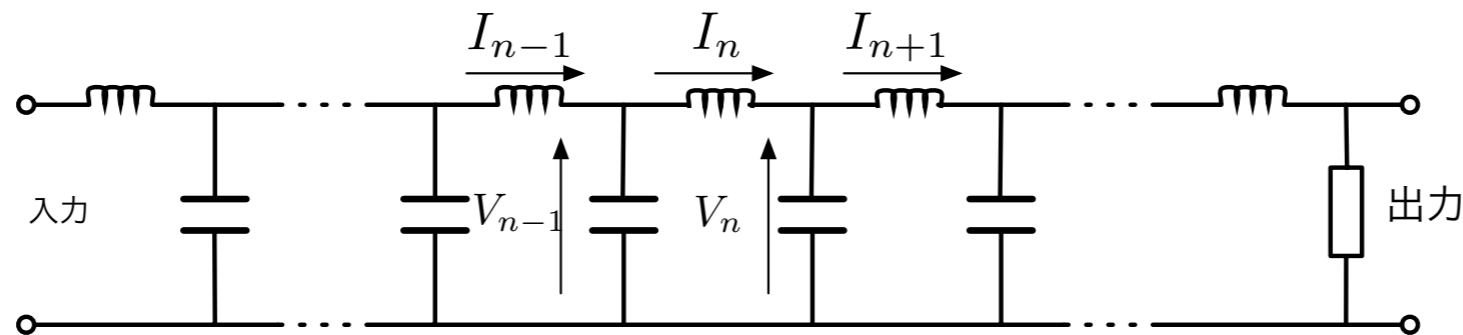


戸田格子方程式

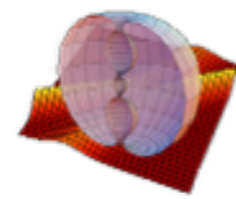
$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n} \quad r_n := q_n - q_{n+1}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(1 + V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \quad \text{or} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \log(1 + V_n) = I_n - I_{n+1}, \\ \frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + V_n = e^{r_n}, \\ I_n = \frac{dq_n}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \frac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \end{cases} \quad a_n = \frac{1}{2} e^{\frac{q_n - q_{n+1}}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{2} \frac{dq_n}{dt}$$



- 次のHamiltonianを持つ古典力学のHamilton系

$$H = \frac{1}{2m} \sum_n p_n^2 + \frac{a}{b} \sum_n e^{-b(q_n - q_{n-1})}, \quad q_n = q_n, \quad p_n = m \frac{dq_n}{dt},$$

- N粒子からなる有限系 (e.g. 周期系) がポアソン括弧に関して可換なN個の保存量を持つならば, それは**完全可積分系**であり, **初期値問題は求積法で解ける**.

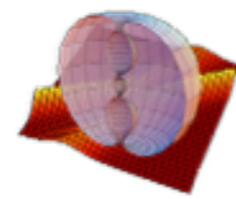
Liouville-Arnoldの定理:

N自由度のHamilton系がポアソン括弧について可換なN個の保存量を持つならば, その初期値問題は, 求積法, すなわち, 以下の操作の有限回の繰り返して解ける.

- 四則演算
- 微分・積分
- 逆函数を取る操作
- 微分・積分を含まない方程式を解く操作

- 完全可積分系の例

- 2体問題 (ケプラー問題)
- ラグランジュのコマ, オイラーのコマ, コワレフスカヤのコマ(1888)
- **戸田格子** (M.Toda, 1967)



- 線形作用素の固有値問題の固有値保存変形としての定式化 (Lax形式):

$$\frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n, \quad \frac{d}{dt} \log(1 + V_n) = I_n - I_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad I_{N+1} = I_1, \quad V_{N+1} = V_1$$

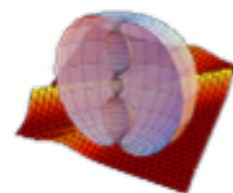
$$L\Psi = \lambda\Psi, \quad L = \begin{pmatrix} I_1 & 1 & & & & 1 + V_N \\ 1 + V_1 & I_2 & 1 & & & \\ & 1 + V_2 & I_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 + V_{N-2} & I_{N-1} & 1 \\ 1 & & & & 1 + V_{N-1} & I_N \end{pmatrix}$$

補助線形問題

$$\frac{d\Psi}{dt} = B\Psi, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 1 + V_N \\ 1 + V_1 & 0 & & & & \\ & 1 + V_2 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 + V_{N-2} & 0 & \\ & & & & 1 + V_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- 両立条件 ($\lambda t = 0$):

$$\frac{dL}{dt}\Psi + L\frac{d\Psi}{dt} = \lambda\frac{d\Psi}{dt} \rightarrow \frac{dL}{dt}\Psi + LB\Psi = BL\Psi \rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = BL - LB} \Rightarrow \text{戸田格子}$$



Lax形式の一つの利点：保存量の組織的な構成

命題： $\text{Tr } L^k$ ($k=1, \dots, N$) は保存量である

$$\frac{d}{dt} \text{Tr } L^k = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

証明： $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対し $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^N a_{ii}, \text{Tr } AB = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N b_{ki} a_{ik} = \text{Tr } BA$

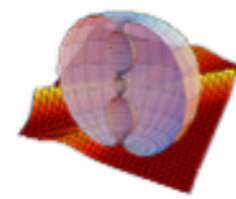
もしAとBの要素がtの関数ならば

$$\frac{d}{dt} \text{Tr } AB = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (a'_{ik} b_{ki} + a_{ik} b'_{ki}) = \text{Tr} \left(\frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt} \right).$$

$L' = BL - LB$ より次のように計算される

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Tr } L^k &= \text{Tr} (L' L^{k-1} + L L' L^{k-2} + \dots + L^{k-1} L') = \text{Tr} [(BL - LB) L^{k-1} + L(BL - LB) L^{k-2} + \dots + L^{k-1} (BL - LB)] \\ &= \text{Tr} [(BL^k - \cancel{LBL^{k-1}}) + (\cancel{LBL^{k-1}} - \cancel{LBL^{k-2}}) + \dots + (\cancel{L^{k-1}BL} - L^k B)] = \text{Tr} (BL^k - L^k B) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

※ q_n について書き下すと $\text{Tr } L \propto$ 運動量, $\text{Tr } L^2 \propto$ 全エネルギー



$$(*) \begin{cases} \frac{dq_n}{dt} = \lambda e^{q_n - \bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_{n-1} - q_n} + \alpha \\ \frac{d\bar{q}_n}{dt} = \lambda e^{q_n - \bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_n - q_{n+1}} + \alpha \end{cases} \xrightarrow{q_n(\bar{q}_n) \text{を消去}} \begin{cases} \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \\ \frac{d^2 \bar{q}_n}{dt^2} = e^{\bar{q}_{n-1} - \bar{q}_n} - e^{\bar{q}_n - \bar{q}_{n+1}} \end{cases}$$

与えられた q_n に対して(*)を解けば, 別の解 \bar{q}_n が得られる: Bäcklund 変換

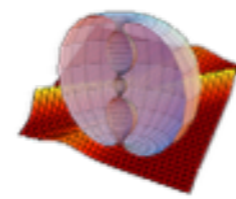
例: $q_n = 0, \lambda = e^{-\kappa}, \alpha = -(e^\kappa + e^{-\kappa})$

$$\begin{cases} 0 = \lambda e^{-\bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_{n-1}} + \alpha \\ \frac{d\bar{q}_n}{dt} = \lambda e^{-\bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_n} + \alpha \end{cases} \rightarrow e^{\bar{q}_n} = X_n \rightarrow \begin{cases} X_n = -\frac{e^{-\kappa}}{e^\kappa X_{n-1} - (e^\kappa + e^{-\kappa})} & \text{離散 Riccati 方程式} \\ X'_n = e^\kappa X_n^2 - (e^\kappa + e^{-\kappa})X_n + e^{-\kappa} & \text{Riccati 方程式} \end{cases}$$

$$X_n = \frac{1 + e^{2\kappa(n-1) + 2\beta t}}{1 + e^{2\kappa n + 2\beta t}}, \quad \beta = \sinh \kappa = \frac{e^\kappa - e^{-\kappa}}{2}$$

- BT は背後の豊富な数理構造の存在を示唆する
- BT は Hamilton 系の正準変換としても定式化できる

ソリトン解の構成：広田の方法(I)



DISDDG2014

進行波解
(1-ソリトン解)

$$q_n = \frac{1 + e^{2\kappa(n-1)+2\beta t}}{1 + e^{2\kappa n+2\beta t}}, \quad \beta = \sinh \kappa = \frac{e^\kappa - e^{-\kappa}}{2}$$

$$e^{q_n} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \quad \text{or} \quad q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}$$

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_{n-1} - \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_n = \frac{\tau_{n-2}\tau_n}{\tau_{n-1}^2} - \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_{n-1} - \frac{\tau_{n-2}\tau_n}{\tau_{n-1}^2} = \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_n - \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2} = f(t) \rightarrow \tau_n'' \tau_n - \tau_n^2 = \tau_{n-1}\tau_{n+1} - f(t) \tau_n^2 \quad (**)$$

● 広田の双線形微分演算子 (D-operator)

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t)g(x', t') \Big|_{x=x', t=t'}$$

$$D_x f \cdot g = f_x g - f g_x, \quad D_x^2 f \cdot g = f_{xx} g - 2f_x g_x + f g_{xx}, \quad D_x D_t f \cdot g = f_{xt} g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt}, \quad \text{etc.}$$

(**)

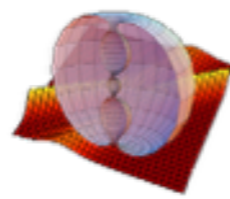


$$\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - f(t) \tau_n^2$$

戸田格子方程式の

「双線形方程式 (形式)」

τ_n : τ 函数



ソリトン解の構成：広田の方法

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \longrightarrow q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \longrightarrow \frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - f(t) \tau_n^2$$

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x=x', t=t'}$$

D-operatorの性質:

双線形性

$$D_x^m D_t^n (af + bg) \cdot h = a D_x^m D_t^n f \cdot h + b D_x^m D_t^n g \cdot h$$

交換則

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = (-1)^{m+n} D_x^n D_t^m g \cdot f$$

引数が定数の場合

$$D_x^m D_t^n f \cdot 1 = \partial_x^m \partial_t^n f$$

指数関数の計算則

$$D_x^m D_t^n e^{p_1 x + q_1 t} \cdot e^{p_2 x + q_2 t} = (p_1 - p_2)^m (q_1 - q_2)^n e^{(p_1 + p_2)x + (q_1 + q_2)t}$$

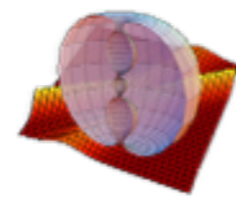
ソリトン解の構成

● $q_n = 0$ は解. それに対応して $\tau_n = 1$ は解($f(t)=1$).

● $\tau_n = 1$ に「摂動法」の技法を用いる. つまり, 展開

$$\tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

を仮定し, 双線形方程式に代入する. ϵ^i の係数から得られる方程式を低次の方から順番に解く. 適当なところでやめればそこで近似解が得られる.



$$\frac{1}{2}D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2, \quad \tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}D_t^2 \left(1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)}\right) \cdot \left(1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)}\right) \\ &= \left(1 + \epsilon f_{n+1}^{(1)} + \epsilon^2 f_{n+1}^{(2)} + \epsilon^3 f_{n+1}^{(3)}\right) \left(1 + \epsilon f_{n-1}^{(1)} + \epsilon^2 f_{n-1}^{(2)} + \epsilon^3 f_{n-1}^{(3)}\right) - \left(1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)}\right)^2 \end{aligned}$$

$$O(\epsilon): \quad f_n^{(1)''} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}$$

$$O(\epsilon^2): \quad f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2}$$

$$O(\epsilon^3): \quad f_n^{(3)''} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} f_n^{(2)}$$

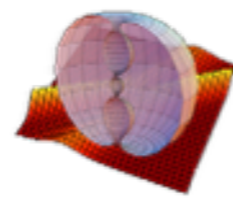
● **I-ソリトン解**: $f_n^{(1)} = e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = P_1 n + Q_1 t (+\text{const.})$

$$O(\epsilon): \quad Q_1^2 = e^{P_1} + e^{-P_1} - 2 = \left(e^{\frac{P_1}{2}} - e^{-\frac{P_1}{2}}\right)^2 \rightarrow Q_1 = \pm 2 \sinh \frac{P_1}{2}$$

$$O(\epsilon^2): \quad f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} = 0$$

→ $f_n^{(2)} = 0$. と選べる. 同様に $f_n^{(k)} = 0$ ($k = 3, 4, \dots$)

→ 摂動展開が切れた! → 厳密解!



$$\text{1-ソリトン解: } \tau_n = 1 + e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = P_1 n \pm 2 \sinh \frac{P_1}{2} t$$

$$\text{2-ソリトン解: } f_n^{(1)} = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad \eta_i = P_i n + Q_i t (+\text{const.})$$

$$O(\epsilon): \quad f_n^{(1)''} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} \longrightarrow Q_i = \pm 2 \sinh \frac{P_i}{2}$$

$$\begin{aligned} O(\epsilon^2): \quad f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} &= -\frac{1}{2} D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} \\ &= -\frac{1}{2} D_t^2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + (e^{\eta_1+P_1} + e^{\eta_2+P_2})(e^{\eta_1-P_1} + e^{\eta_2-P_2}) - (e^{\eta_1} + e^{\eta_2})^2 \\ &= -D_t^2 e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2+P_1-P_2} + e^{\eta_1+\eta_2-P_1+P_2} - 2e^{\eta_1+\eta_2} \\ &= -(Q_1 - Q_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} + \left(e^{\frac{P_1-P_2}{2}} - e^{-\frac{P_1-P_2}{2}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} = -\left(e^{\frac{P_1}{2}} - e^{-\frac{P_1}{2}} \right) \left(e^{\frac{P_2}{2}} - e^{-\frac{P_2}{2}} \right) \left(e^{\frac{P_1-P_2}{4}} - e^{-\frac{P_1-P_2}{4}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} \end{aligned}$$

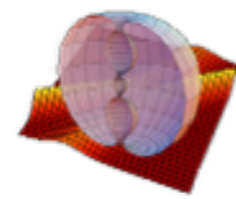
$$f_n^{(2)} = A_{12} e^{\eta_1+\eta_2} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= A_{12} (Q_1 + Q_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} - A_{12} \left(e^{\frac{P_1+P_2}{2}} - e^{-\frac{P_1+P_2}{2}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} \\ &= -A_{12} \left(e^{\frac{P_1}{2}} - e^{-\frac{P_1}{2}} \right) \left(e^{\frac{P_2}{2}} - e^{-\frac{P_2}{2}} \right) \left(e^{\frac{P_1+P_2}{4}} - e^{-\frac{P_1+P_2}{4}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} \end{aligned}$$



$$A_{12} = \left(\frac{e^{\frac{P_1-P_2}{4}} - e^{-\frac{P_1-P_2}{4}}}{e^{\frac{P_1+P_2}{4}} - e^{-\frac{P_1+P_2}{4}}} \right)^2 = \left(\frac{\sinh \frac{P_1-P_2}{4}}{\sinh \frac{P_1+P_2}{4}} \right)^2$$

ソリトン解の構成：広田の方法(4)



DISDDG2014

$$f_n^{(1)} = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad f_n^{(2)} = A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2}, \quad \eta_i = P_i n + Q_i t, \quad Q_i = \pm 2 \sinh \frac{P_i}{2}$$

$$\begin{aligned} O(\epsilon^3): \quad f_n^{(3)''} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} &= -D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} f_n^{(2)} \\ &= -D_t^2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} + (e^{\eta_1 + P_1} + e^{\eta_2 + P_2}) A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2 - P_1 - P_2} + (e^{\eta_1 - P_1} + e^{\eta_2 - P_2}) A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2 + P_1 + P_2} \\ &\quad - 2(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} \end{aligned}$$

右辺第1項

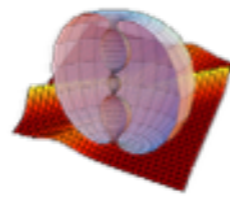
$$\begin{aligned} D_t^2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot e^{\eta_1 + \eta_2} &= D_t^2 e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_1 + \eta_2} + D_t^2 e^{\eta_2} \cdot e^{\eta_1 + \eta_2} = [Q_1 - (Q_1 + Q_2)]^2 e^{2\eta_1 + \eta_2} + [Q_2 - (Q_1 + Q_2)]^2 e^{\eta_1 + 2\eta_2} \\ &= Q_2^2 e^{2\eta_1 + \eta_2} + Q_1^2 e^{\eta_1 + 2\eta_2} \end{aligned}$$

$$\text{右辺} : A_{12} \left[-Q_2^2 e^{2\eta_1 + \eta_2} - Q_1^2 e^{\eta_1 + 2\eta_2} + \left(e^{\frac{P_2}{2}} - e^{-\frac{P_2}{2}} \right)^2 e^{2\eta_1 + \eta_2} + \left(e^{\frac{P_1}{2}} - e^{-\frac{P_1}{2}} \right)^2 e^{\eta_1 + 2\eta_2} \right] = 0$$

→ $f_n^{(3)} = 0$. と選べる 同様に $f_n^{(k)} = 0$ ($k = 4, 5, \dots$)

→ 摂動展開がまた切れた！ 厳密な 2-ソリトン解!

$$\text{2-ソリトン解:} \quad \tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2}, \quad A_{12} = \left(\frac{\sinh \frac{P_1 - P_2}{4}}{\sinh \frac{P_1 + P_2}{4}} \right)^2$$



2-ソリトン解:

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2}, \quad \eta_i = p_i n + q_i t, \quad q_i = -2 \sinh \frac{p_i}{2}$$

$p_1 > p_2 > 0$ と仮定し次のように書く: $\eta_i = p_i(n - v_i t), \quad v_i = \frac{2}{p_i} \sinh \frac{p_i}{2}$

v_i is p_i の単調増加関数だから $v_1 > v_2 > 0$.

● 速度 v_1 で走る波に乗って眺める

$$\eta_1 = p_1(n - v_1 t) = p_1 \xi_1 \quad \xi_1 = \text{const.}$$

注意: $\eta_2 = p_2(n - v_2 t) = p_2(n - v_1 t) + p_2(v_1 - v_2)t = p_2 \xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t \quad (v_1 - v_2 > 0)$

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = 1 + e^{p_1 \xi_1} + e^{p_2 \xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t}$$

> 0

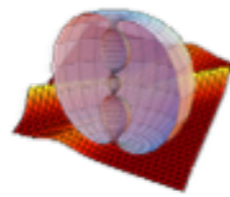
自明な乗法因子を除いて同値

$$t \rightarrow -\infty : \quad \tau_2 \sim 1 + e^{p_1 \xi_1} = \boxed{1 + e^{\eta_1}}$$

$$t \rightarrow +\infty : \quad \tau_2 \sim e^{p_2 \xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t} = e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = e^{\eta_2} (1 + A_{12}e^{\eta_1}) \approx \boxed{1 + A_{12}e^{\eta_1}}$$

Remark: τ_n に $\exp[Pt + Qn]$ をかけても, $q_n = \log \tau_{n-1} / \tau_n$ は定数が加えられるだけ.

$t \sim \pm \infty$ で速度 v_1 で走る波が観測される. 振幅・速度は変化しない. しかし $\log A_{12}$ だけ位相シフトが発生.



● 速度 v_2 で走る波から眺める : $\eta_2 = p_2(n - v_2 t) = p_2 \xi_2 \quad \xi_2 = \text{const.}$

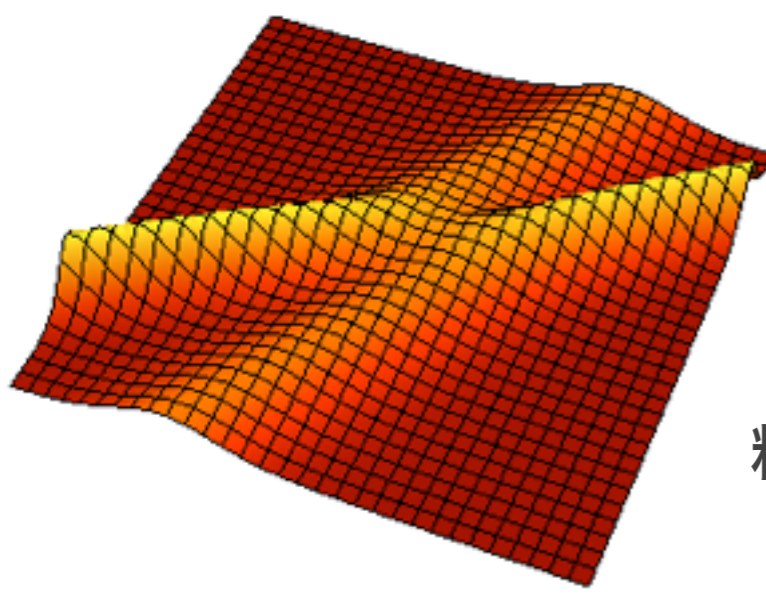
注意: $\eta_1 = p_1(n - v_1 t) = p_1(n - v_2 t) + p_1(v_2 - v_1)t = p_1 \xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t \quad (v_2 - v_1 < 0)$
 < 0

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = 1 + e^{p_1 \xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t} + e^{p_2 \xi_2} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t}$$

$$t \rightarrow -\infty : \tau_2 \sim e^{p_1 \xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t} = e^{\eta_1} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = e^{\eta_1} (1 + A_{12}e^{\eta_2}) \approx 1 + A_{12}e^{\eta_2}$$

$$t \rightarrow +\infty : \tau_2 \sim 1 + e^{p_2 \xi_2} = 1 + e^{\eta_2} < 0$$

$t \sim \pm \infty$ で速度 v_2 で走る波が観測された。振幅・速度に変化はないが、
位相シフト $-\log A_{12}$ が発生した。



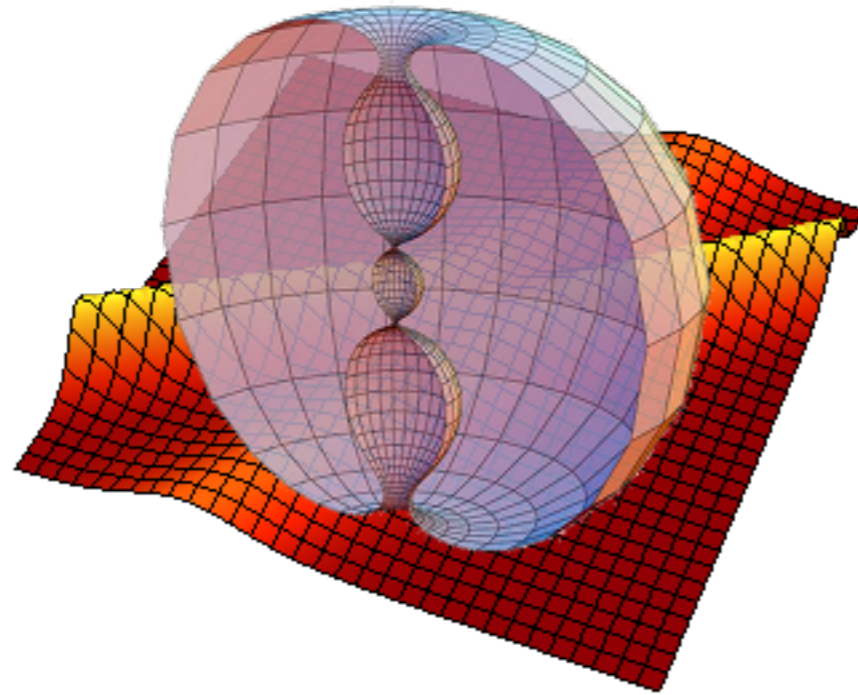
$$R_n = q_n - q_{n+1} = \log \frac{\tau_{n-1} \tau_{n+1}}{\tau_n^2}$$

- 相互作用で振幅・速度は保存する
- 非線形相互作用の証拠として **位相シフト**

粒子的性質を持つ孤立波: **soliton = solitary+on**

第2章

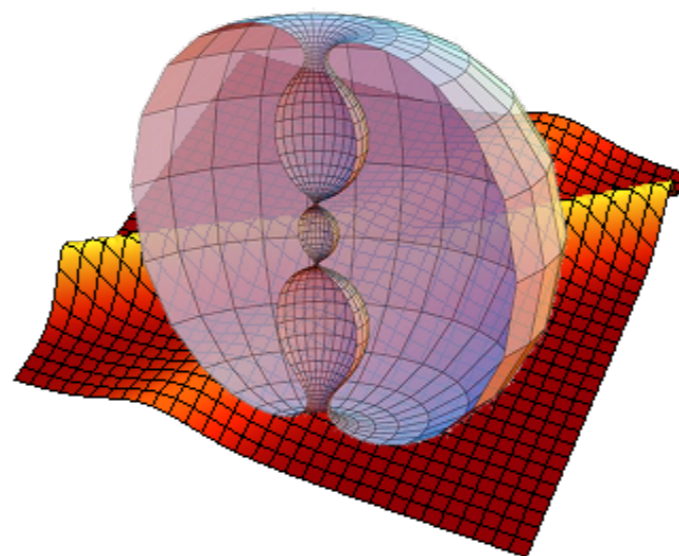
2次元戸田格子を通じて学ぶ 可積分系の理論

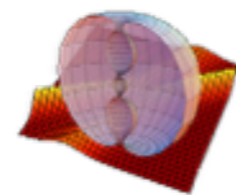


I : 2次元戸田格子方程式とその性質

内容とキーワード

- 広田の方法で解を作る
- ソリトン解の行列式構造 : τ 函数
- 双線形方程式 = 行列式の恒等式 : Plücker 関係式





$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}},$$

$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1 + V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log(1 + V_n) = I_n - I_{n+1}, \quad \frac{\partial I_n}{\partial y} = V_{n-1} - V_n$$

双線形方程式

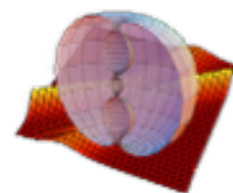
$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - f(t) \tau_n^2$$

従属変数の間の関係

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad r_n = q_n - q_{n+1} = \log \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad 1 + V_n = \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad I_n = \frac{\partial q_n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}$$

戸田格子との関係： $t = x+y, s = x-y$ において次の条件を課す $\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0$

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) q_n = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \rightarrow \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}$$



$$\frac{1}{2}D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2, \quad \tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

$$O(\epsilon): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(1)} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}$$

$$O(\epsilon^2): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(2)} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2}$$

$$O(\epsilon^3): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(3)} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} f_n^{(2)}$$

I-ソリトン解:

$$f_n^{(1)} = R_1^{2n} e^{P_1 x + Q_1 y} = e^{\zeta_1}, \quad \zeta_1 = 2n \log R_1 + P_1 x + Q_1 y (+\zeta_{10})$$

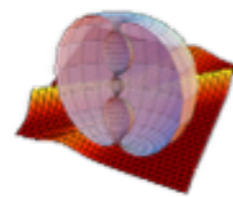
$$O(\epsilon): \quad P_1 Q_1 = R_1^2 + \frac{1}{R_1^2} - 2 = \left(R_1 - \frac{1}{R_1}\right)^2$$

$$O(\epsilon^2): \quad f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} = 0 \rightarrow \boxed{f_n^{(2)} = 0}$$

I-ソリトン解:

$$\tau_n = 1 + R_1^{2n} e^{P_1 x + Q_1 y}, \quad P_1 Q_1 = \left(R_1 - \frac{1}{R_1}\right)^2$$

2-ソリトン解(I)



DISDDG2014

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2, \quad \tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

$$f_n^{(1)} = e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}, \quad \zeta_i = 2n \log R_i + P_i x + Q_i y$$

2-ソリトン解:

$$\tau_n = 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + A_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2}, \quad A_{12} = - \frac{\left[(P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2) - \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right]}{\left[(P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2) - \left(R_1 R_2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right)^2 \right]} \quad P_i Q_i = \left(R_i - \frac{1}{R_i} \right)^2$$

● ソリトン解の「よい」パラメータ付け (重要!)

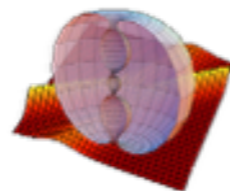
$$P_i = p_i - q_i, \quad Q_i = -\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}, \quad R_i = \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$P_i Q_i = (p_i - q_i) \left(-\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \right) = \frac{p_i}{q_i} + \frac{q_i}{p_i} - 2 = \left(R_i - \frac{1}{R_i} \right)^2$$
$$A_{ij} = \frac{(p_i - q_i)(p_j - q_j)}{(p_i - q_j)(p_j - q_i)}$$

2-ソリトン解:

$$\tau_n = 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2}$$

$$\eta_i = n \log p_i + p_i x - \frac{y}{p_i} + \eta_{0i}, \quad \xi_i = n \log q_i + q_i x - \frac{y}{q_i} + \xi_{0i}, \quad A_{12} = \frac{(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)}$$



2-ソリトン解は2x2行列式で表される！

$$\tau_n = 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \approx \begin{vmatrix} e^{\eta_1} + e^{\xi_1} & p_1 e^{\eta_1} + q_1 e^{\xi_1} \\ e^{\eta_2} + e^{\xi_2} & p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \quad \text{Casorati 行列式}$$

$$f_n^{(i)} = e^{\eta_i} + e^{\xi_i}, \quad \eta_i = n \log p_i + p_i x - \frac{y}{p_i} + \eta_{0i}, \quad \xi_i = n \log q_i + q_i x - \frac{y}{q_i} + \xi_{0i}$$

 Check

$$\text{右辺} = (e^{\eta_1} + e^{\xi_1})(p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2}) - (e^{\eta_2} + e^{\xi_2})(p_1 e^{\eta_1} + q_1 e^{\xi_1})$$

$$= (p_2 - p_1)e^{\eta_1 + \eta_2} + (q_2 - p_1)e^{\eta_1 + \xi_2} + (p_2 - q_1)e^{\eta_2 + \xi_1} + (q_2 - q_1)e^{\xi_1 + \xi_2}$$

$$\approx 1 + \frac{q_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 - \xi_1} + \frac{p_2 - q_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \quad (\star)$$

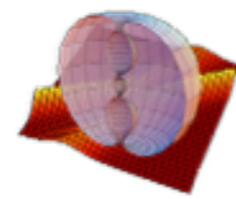
任意定数の自由度を使う！

$$(q_2 - p_1)e^{\eta_1} = e^{\eta_1 + \log(q_2 - p_1)} \rightarrow e^{\eta_1} \quad (p_2 - q_1)e^{\eta_2} = e^{\eta_2 + \log(p_2 - q_1)} \rightarrow e^{\eta_2}$$

$$(q_2 - q_1)e^{\xi_1} = e^{\xi_1 + \log(q_2 - q_1)} \rightarrow e^{\xi_1} \quad (q_2 - q_1)e^{\xi_2} = e^{\xi_2 + \log(q_2 - q_1)} \rightarrow e^{\xi_2}$$

$$(\star) = 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \times \frac{(q_2 - q_1)^2}{(q_2 - p_1)(p_2 - q_1)} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2}$$

$$= 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)}{(q_2 - p_1)(p_2 - q_1)} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} = (\text{左辺})$$



定理： 次の $N \times N$ Casorati 行列式

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

は2次元戸田格子方程式の双線形方程式を満たす：

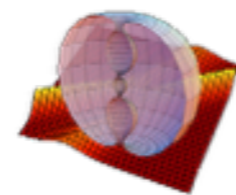
$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

ただし, $f_n^{(k)}$ ($k=1, \dots, N$) は次の線形関係式を満たす.

$$\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(k)}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(k)}$$

注意:

$$f_n^{(k)} = p_k^n \exp\left(p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}\right) + q_k^n \exp\left(q_k x - \frac{y}{q_k} + \xi_{k0}\right) \longrightarrow \mathbf{N}\text{-ソリトン解}$$



- ステップ 1: τ の微分 = 列がシフトした行列式 : 「微分公式」

Freeman-Nimmo の記法 :

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} = | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 |, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} f_{n+j}^{(1)} \\ f_{n+j}^{(2)} \\ \vdots \\ f_{n+j}^{(N)} \end{pmatrix}$$

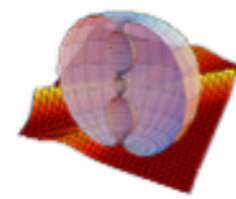
命題 : (微分公式)

$$\tau_n = | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | \quad \partial_x \tau_n = | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N |$$

$$\tau_{n+1} = | \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1, N | \quad -\partial_y \tau_n = | -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 |$$

$$\tau_{n-1} = | -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2 | \quad -(\partial_x \partial_y + 1) \tau_n = | -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N |$$

Casorati 行列式 (4)



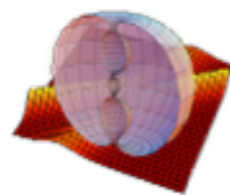
DISDDG2014

👤 Check: 左の列の公式は定義より自明. 右の列の公式は以下のように確かめられる:

$$\begin{aligned}\partial_x \tau_n &= |\mathbf{0}', \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| + \dots + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2', N-1| + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1'| \\ &= |\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| + \dots + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-1, N-1| + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N| \\ &= \boxed{|\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N|} \quad \because \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_y \tau_n &= |\mathbf{0}', \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| + |\mathbf{0}, \mathbf{1}', \dots, N-2, N-1| + \dots + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1'| \\ &= -|\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| - |\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, N-2, N-1| - \dots - |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-2| \\ &= \boxed{-|\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1|} \quad \because \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y \tau_n &= -|\mathbf{-1}', \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| - |\mathbf{-1}, \mathbf{1}', \dots, N-2, N-1| + \dots + |\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1'| \\ &= -|\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| - |\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N| \\ &= \boxed{-\tau_n - |\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N|}\end{aligned}$$



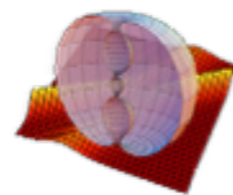
● ステップ 2: 双線形方程式 = 行列式の恒等式: Plücker 関係式

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 = (\partial_x \partial_y \tau_n) \tau_n - (\partial_x \tau_n) (\partial_y \tau_n) - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 \\
 &= \left(-|0, 1, \dots, N-2, N-1| - | -1, 1, \dots, N-2, N| \right) \times |0, 1, \dots, N-2, N-1| \\
 &\quad - |0, 1, \dots, N-2, N| \times \left(-| -1, 1, \dots, N-2, N-1| \right) \\
 &\quad - |1, 2, \dots, N-1, N| \times | -1, 0, 1, \dots, N-2| \\
 &\quad + |0, 1, \dots, N-2, N-1| \times |0, 1, \dots, N-2, N-1| \\
 &= -| -1, 0, 1, \dots, N-2| \times |1, 2, \dots, N-1, N| \\
 &\quad + | -1, 1, \dots, N-2, N-1| \times |0, 1, \dots, N-2, N| \\
 &\quad - | -1, 1, \dots, N-2, N| \times |0, 1, \dots, N-2, N-1|
 \end{aligned}$$

Bilinear eq. of 2DTL (※) $0 =$

$$\begin{aligned}
 &| -1, 0, 1, \dots, N-2| \quad \times \quad |1, \dots, N-2, N-1, N| \\
 &+ |0, 1, \dots, N-2, N-1| \quad \times \quad | -1, 1, \dots, N-2, N| \\
 &- |0, 1, \dots, N-2, N| \quad \times \quad | -1, 1, \dots, N-2, N-1|
 \end{aligned}$$

Casorati 行列式 (6)



DISDDG2014

● 命題： 行列式のLaplace展開

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$: $N \times N$ 行列

$|A|_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}$: A から i_1, i_2, \dots, i_l 行と j_1, j_2, \dots, j_l 列を **選んで** 得られる $l \times l$ 小行列式

$\overline{|A|}_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}$: A から i_1, i_2, \dots, i_l 行と j_1, j_2, \dots, j_l 列を **除去して** 得られる $(N-l) \times (N-l)$ 小行列式

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq N$ を満たす l 個の整数 i_1, i_2, \dots, i_l s を固定すると, 次が成り立つ.

$$|A| = (-1)^{i_1 + \dots + i_l} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N} (-1)^{j_1 + \dots + j_l} |A|_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l} \times \overline{|A|}_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}$$

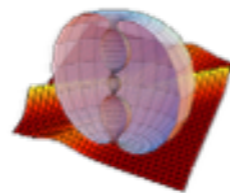
● 例: $l = 1, i_l = 1$.

$$|A|_{j_1}^{i_1} = a_{1j_1}$$

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 \leq N} (-1)^{1+j_1} a_{1j_1} \times \overline{|A|}_{j_1}^1 = \sum_{1 \leq j_1 \leq N} a_{1j_1} \times A_{1j_1}, \quad A_{1j_1} : (1, j_1)\text{-余因子}$$

→ 第1行に関する展開公式

Casorati 行列式(7)



DISDDG2014

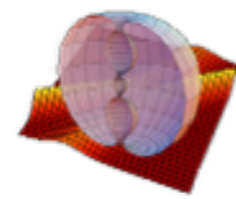
次のような $2N \times 2N$ 行列式の恒等式を考える：

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & \underbrace{0 \ 1 \ \dots \ N-2}_{N-1} & \emptyset & N-1 & N \\ -1 & \emptyset & \underbrace{1 \ \dots \ N-2}_{N-2} & N-1 & N \end{vmatrix}$$

● **チェック:** 上のブロックから下のブロックを引く. 次に：

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \begin{vmatrix} \emptyset & \mathbf{0} & \boxed{1 \ \dots \ N-2} & -(1) \ \dots \ -(N-2) & \emptyset & \emptyset \\ -1 & \emptyset & \emptyset & 1 \ \dots \ N-2 & N-1 & N \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \emptyset & \mathbf{0} & 1 \ \dots \ N-2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ -1 & \emptyset & \emptyset & 1 \ \dots \ N-2 & N-1 & N \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ここでLaplace展開を $l=N, i_1=1, \dots, i_N=N$ として適用. **上のブロックには**
 $N+1$ 個の空の列があるから, 展開の全ての項はゼロになる



● Plücker 関係式は無数個ある

- 特別視する列ベクトル $-1, 0, N-1, N$ は何でもよい.
- 特別視するベクトルは (4本以上であれば) 何本でもよい.

● 微分・差分構造:

τ に適切な微分・差分構造を導入することで, 任意の列のシフトを伴う行列式は τ に適切な微分作用素をかけて得られる.

例: 無数個の独立変数 x_j, y_j ($j=1, 2, \dots$) を次のように導入: $\frac{\partial \varphi_n^{(i)}}{\partial x_j} = \varphi_{n+j}^{(i)}, \quad \frac{\partial \varphi_n^{(i)}}{\partial y_j} = -\varphi_{n-j}^{(i)}$

● 無数個のPlücker関係式

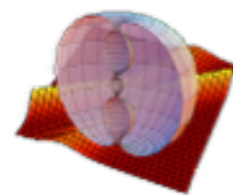
= 同じ解を共有する無数個の双線形方程式

(上記の微分・差分) 「2次元戸田格子階層」

(x_j または y_j のみ) 「KP階層」

佐藤理論:

- Sソリトン方程式の解空間はグラスマン多様体である.
- τ 関数はPlücker座標である.



2DTL と射影微分幾何

$$\frac{\partial^2 \log h_n}{\partial x \partial y} = h_{n+1} + h_{n-1} - 2h_n, \quad h_n = \frac{\tau_{n-1} \tau_{n+1}}{\tau_n^2},$$

は実射影空間で「共役網」(Darboux, 1889)と呼ばれる座標系を許容する曲面の変換を記述する。Darbouxは半無限格子上で現在「分子解」と呼ばれる解も構成した。

2次元戸田格子方程式の「分子解」

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f(x, y) & \partial_x f(x, y) & \cdots & \partial_x^{n-1} f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) & \partial_x \partial_y f(x, y) & \cdots & \partial_x^{n-1} \partial_y f(x, y) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_y^{n-1} f(x, y) & \partial_x \partial_y^{n-1} f(x, y) & \cdots & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-1} f(x, y) \end{vmatrix} \quad f(x, y) : \text{任意函数}$$

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{初期 (境界) 条件: } \tau_{-1} = 0, \quad \tau_0 = 1, \quad \tau_1 = f.$$

行列式のサイズ = 格子番号

elles donnent

$$(26) \quad \begin{cases} h_i = k_{i+1}, \\ k_i = 2k_{i+1} - h_{i+1} - \frac{\partial^2 \log k_{i+1}}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

On pourra d'ailleurs attribuer à l'indice i toutes les valeurs entières, positives ou négatives; on retrouve, par exemple, les formules (19) et (24) en faisant $i = 0$ et $i = -1$. On pourrait aussi, au lieu de considérer deux séries de quantités h_i et k_i , introduire seulement les quantités h_i . On aurait alors une suite de quantités

$$\dots, h_{-2}, h_{-1}, h, h_1, h_2, \dots$$

se déduisant les unes des autres par la formule de récurrence

$$(27) \quad h_{i+1} + h_{i-1} = 2h_i - \frac{\partial^2 \log h_i}{\partial x \partial y},$$

et les invariants de l'équation (E_i) seraient h_i et h_{i-1} . L'équation (E) fournira donc les deux termes consécutifs h et h_{-1} ; et la relation précédente permettra de calculer les autres de proche en proche.

Il est difficile d'obtenir directement l'expression de h_i en fonction de h et de h_{-1} . On peut signaler cependant la relation

$$(28) \quad h_{i+1} = h_i + h - k - \frac{\partial^2 \log h h_1 \dots h_i}{\partial x \partial y},$$

La formule de récurrence

$$(4) \quad h_{p+1} - 2h_p + h_{p-1} = - \frac{\partial^2 \log h_p}{\partial x \partial y}$$

permettra ensuite de calculer successivement les invariants des équations $(E_{i-1}), (E_{i-2}), \dots$. On aura, par exemple,

$$(5) \quad h_{i-2} = 2h_{i-1} - \frac{\partial^2 \log h_{i-1}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left(x \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \right).$$

Mais nous allons voir que l'on peut obtenir directement l'expression de l'un quelconque de ces invariants.

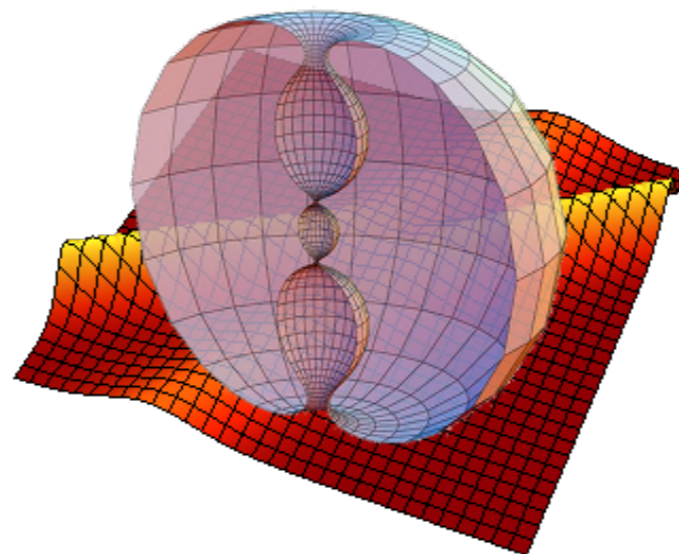
Introduisons, en effet, les quantités H_k définies par les formules suivantes :

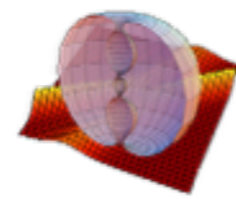
$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 = x, \\ H_1 = \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}, \\ \dots \\ H_p = \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^p x}{\partial x^p} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} & \dots & \dots & \frac{\partial^{p+1} x}{\partial x^p \partial y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^p x}{\partial y^p} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^{2p} x}{\partial x^p \partial y^p} \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

2：簡約

内容とキーワード

- **簡約**：解空間を制限することで新しい方程式を作る操作
- **Sine-Gordon方程式, 戸田格子方程式**
- **解のレベルでの簡約**





● **簡約:** 解空間 (解のパラメータ) を制限して新しい方程式を作る操作

● **2DTL → IDTL:** $t = x+y, s = x-y$ として次の条件を課す $\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0$

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) q_n = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}}$$

● **2DTL → sinh-Gordon:** 2周期性を課す $q_{n+2} = q_n$

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 q_0}{\partial x \partial y} = e^{q_1-q_0} - e^{q_0-q_1} \\ \frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} = e^{q_0-q_1} - e^{q_1-q_0} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 2(e^{-v} - e^v), \quad v := q_0 - q_1$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -4 \sinh v} \quad \text{sinh-Gordon 方程式}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -4 \sin \theta} \quad \text{sine-Gordon 方程式}$$

$$v = \sqrt{-1} \theta \in \sqrt{-1} \mathbb{R}$$

On est ainsi conduit au système

$$2k - 2h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$2h - 2k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = 0,$$

qui doit déterminer h et k . En ajoutant les deux équations, on trouve

$$\frac{\partial^2 \log hk}{\partial x \partial y} = 0, \quad hk = XY.$$

Ici encore, en remplaçant les variables x, y par des fonctions nouvelles de ces variables, on peut ramener la relation précédente à la forme

$$hk = 1;$$

tout se réduira donc à l'intégration de l'équation

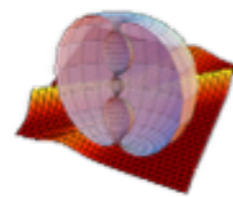
$$\frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = 2 \left(h - \frac{1}{h} \right),$$

que nous rencontrerons plus tard dans la théorie des surfaces à courbure constante et dans l'étude d'autres questions de Géométrie. Si l'on pose

$$h = e^\Theta,$$

elle prend la forme

$$(31) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 2(e^\Theta - e^{-\Theta}).$$



● 2DTL → IDTL: τ 関数に制限を加えて条件を実現する $\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0$

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \implies \partial_s q_n = \frac{\partial_s \tau_{n-1}}{\tau_{n-1}} - \frac{\partial_s \tau_n}{\tau_n} = 0 \implies \boxed{\partial_s \tau_n = \text{const.} \times \tau_n}$$

ソリトン解: $\tau_n = \det \left(\varphi_{n+j-1}^{(i)} \right)_{i,j=1,\dots,N}$

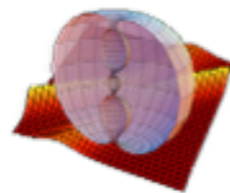
$$\varphi_n^{(i)} = p_i^n e^{p_i x - \frac{y}{p_i}} + q_i^n e^{q_i x - \frac{y}{q_i}} = p_i^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(p_i - \frac{1}{p_i} \right) t + \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right) s \right] + q_i^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(q_i - \frac{1}{q_i} \right) t + \frac{1}{2} \left(q_i + \frac{1}{q_i} \right) s \right]$$

$$\rightarrow \partial_s \varphi_n^{(i)} = \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right) p_i^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(p_i - \frac{1}{p_i} \right) t + \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right) s \right] + \frac{1}{2} \left(q_i + \frac{1}{q_i} \right) q_i^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(q_i - \frac{1}{q_i} \right) t + \frac{1}{2} \left(q_i + \frac{1}{q_i} \right) s \right] \propto \varphi_n^{(i)}$$

$$\rightarrow p_i + \frac{1}{p_i} = q_i + \frac{1}{q_i} \longrightarrow (p_i - q_i) \left(1 - \frac{1}{p_i q_i} \right) = 0 \longrightarrow \boxed{q_i = \frac{1}{p_i}}, \quad \partial_s \varphi_n^{(i)} = \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right) \varphi_n^{(i)}$$

$$\implies \partial_s \tau_n = C_N \tau_n, \quad C_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right)$$

戸田格子への簡約 (2)



DISDDG2014

$$t = x + y, \quad s = x - y, \quad q_i = \frac{1}{p_i}, \quad \partial_s \tau_n = C_N \tau_n, \quad C_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right)$$

2DTL $(\partial_x \partial_y \tau_n) \tau_n - (\partial_x \tau_n) (\partial_y \tau_n) = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$

LHS = $(\partial_t^2 - \partial_s^2) \tau_n \times \tau_n - (\partial_t - \partial_s) \tau_n \times (\partial_t + \partial_s) \tau_n = (\partial_t^2 - C_N^2) \tau_n \times \tau_n - (\partial_t - C_N) \tau_n \times (\partial_t + C_N) \tau_n$

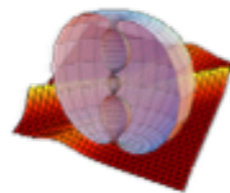
$$= (\partial_t^2 \tau_n) \tau_n - (\partial_t \tau_n)^2 \implies \boxed{(\partial_t^2 \tau_n) \tau_n - (\partial_t \tau_n)^2 = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2} \quad \text{1DTL!}$$

戸田格子方程式の双線形方程式と τ 関数

$$\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_n^{(N)} & \varphi_{n+1}^{(N)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_n^{(i)} = p_i^n e^{\frac{t}{2} \left(p_i - \frac{1}{p_i} \right) + \eta_{i0}} + p_i^{-n} e^{-\frac{t}{2} \left(p_i - \frac{1}{p_i} \right) + \xi_{i0}}$$



● **2DTL** → **Sinh-Gordon**: τ 函数に制限を加えて条件を実現する $q_{n+2} = q_n$

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \implies \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_{n+2}} = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \implies \boxed{\tau_{n+2} = \text{const.} \times \tau_n}$$

● **ソリトン解** :

$$\tau_n = \det \left(f_{n+j-1}^{(i)} \right)_{i,j=1,\dots,N}$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k}} + q_k^n e^{q_k x - \frac{y}{q_k}} \rightarrow f_{n+2}^{(k)} = p_k^2 p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k}} + q_k^2 q_k^n e^{q_k x - \frac{y}{q_k}} \propto f_n^{(k)} \rightarrow p_k^2 = q_k^2$$

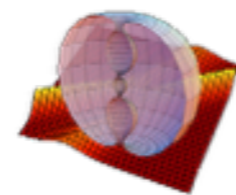
$$\rightarrow \boxed{q_k = -p_k} \rightarrow f_{n+2}^{(k)} = p_k^2 f_n^{(k)} \implies \tau_{n+2} = \lambda \tau_n, \quad \lambda = \prod_{i=1}^N p_i^2$$

● **双線形方程式** :

$$v = q_0 - q_1 = \log \frac{\tau_{-1} \tau_1}{\tau_0^2} = \log \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - \log \lambda$$

$$\mathbf{2DTL} \quad \frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2 \implies \begin{cases} \frac{1}{2} D_x D_y \tau_0 \cdot \tau_0 = \frac{1}{\lambda} \tau_1^2 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2} D_x D_y \tau_1 \cdot \tau_1 = \lambda \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases}$$

sinh-Gordon



Sinh-Gordon 方程式の双線形方程式と Casorati 行列式解

$$v_{xy} = -4 \sinh v, \quad v = 2 \log \frac{\tau_1}{\tau_0} - \log \lambda$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} D_x D_y \tau_0 \cdot \tau_0 = \frac{1}{\lambda} \tau_1^2 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2} D_x D_y \tau_1 \cdot \tau_1 = \lambda \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases} \quad \tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix},$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}} + (-p_k)^n e^{-\left(p_k x - \frac{y}{p_k}\right) + \xi_{k0}}, \quad \lambda = \prod_{i=1}^N p_i^2$$

🎤 Sine-Gordon 方程式への簡約

sinh-Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -4 \sinh v$$

$$\longrightarrow v = i\theta \in i\mathbb{R} \longrightarrow$$

sine-Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -4 \sin \theta$$

v : 純虚数という制約を τ 関数のレベルで実現するのは自明ではない

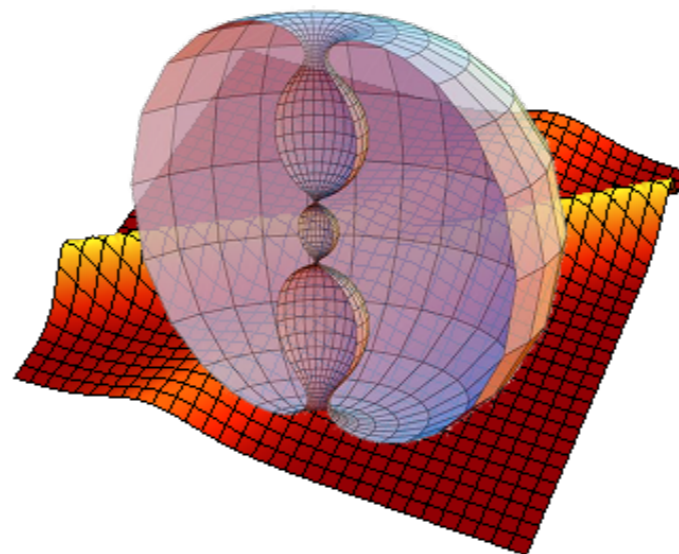
Gram 行列式が便利！ (太田さんの講演)

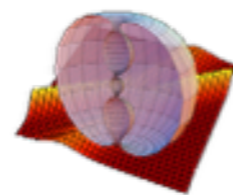
Casorati 行列式では $\eta_{i0} \in \mathbb{R}, \quad \xi_i = \frac{\pi i}{2}$ ととればよいことが示される。

3 : Bäcklund 変換

内容とキーワード

- 双線形方程式の算術を用いたBTの導出
- BTからのLax形式の導出
- (BTから新しい解を作る)





定理 (戸田格子のBT) : τ_n を戸田格子の解とする.

$$\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2 \quad (\star)$$

パラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対し, もし $\bar{\tau}_n$ が次を満たせば

$$\begin{aligned} D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n &= \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \\ D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n &= -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \end{aligned} \quad (\star)$$

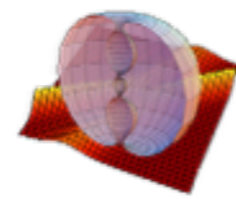
$\bar{\tau}_n$ も (\star) を満たす. 逆に, もし $\bar{\tau}_n$ が (\star) を満たし, かつ τ_n が (\star) を満たせば, τ_n も (\star) の解である.

証明 :

$$P = \left[\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 \right] (\bar{\tau}_n)^2 - (\tau_n)^2 \left[\frac{1}{2} D_x D_y \bar{\tau}_n \cdot \bar{\tau}_n - \bar{\tau}_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} + (\bar{\tau}_n)^2 \right]$$

τ_n が (\star) を満たし $\bar{\tau}_n$ が (\star) を満たすとき, $P=0$ を示せばよい.

Bäcklund 変換 (2)



DISDDG2014

Key : 広田微分の「交換公式」

命題 : 任意の $x, y, \tau_n, \bar{\tau}_n$ について, 次の公式が成り立つ

$$(1) \quad \left[D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n \right] \tau_n^2 - (\tau_n)^2 \left[D_x D_y \bar{\tau}_n \cdot \bar{\tau}_n \right] = 2D_x \left(D_y \tau_n \cdot \bar{\tau}_n \right) \cdot \bar{\tau}_n \tau_n,$$

$$(2) \quad D_x (\tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1}) \cdot (\bar{\tau}_n \tau_n) = \left[D_x \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n \right] \bar{\tau}_{n-1} \tau_n + \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \left[D_x \bar{\tau}_{n-1} \cdot \tau_n \right]$$

直接検証できる. 広田の本に, 類似の公式を組織的に生産するエレガントな方法が載っている.

$$P = \left[\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 \right] (\bar{\tau}_n)^2 - (\tau_n)^2 \left[\frac{1}{2} D_t^2 \bar{\tau}_n \cdot \bar{\tau}_n - \bar{\tau}_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} + (\bar{\tau}_n)^2 \right]$$

$$= D_t \left[D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n \right] \cdot \bar{\tau}_n \tau_n + \tau_n \bar{\tau}_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} \tau_n + \tau_{n-1} \bar{\tau}_n \bar{\tau}_n \tau_{n+1} \quad \because \text{exchange formula (1)}$$

$$= D_t \left[D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n - \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} \right] \cdot \bar{\tau}_n \tau_n + \lambda_1 \left[D_x \bar{\tau}_{n+1} \cdot \tau_n + \lambda_1^{-1} \bar{\tau}_n \tau_{n+1} \right] \tau_{n-1} \bar{\tau}_n + \lambda_1 \left[D_x \tau_n \cdot \bar{\tau}_{n-1} + \lambda_1^{-1} \tau_{n-1} \bar{\tau}_n \right] \bar{\tau}_n \tau_{n+1} \\ \because \text{exchange formula (2)}$$

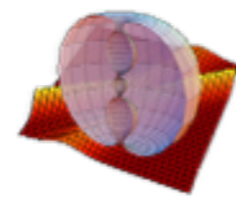
Therefore, if

$$D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n - \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} = -\lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \quad \longleftarrow \quad \text{1st term: } D_t f \cdot f = 0$$

$$D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \quad \longleftarrow \quad \text{2nd,3rd term: } \lambda_3 \text{ terms cancel}$$

then P becomes 0. q.e.d.

Bäcklund 変換 (3)



DISDDG2014

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad \bar{q}_n = \log \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\bar{\tau}_n}, \quad \mathbf{1DTL:} \quad \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}$$

BT : $\frac{D_t f \cdot g}{fg} = \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = (\log f)' - (\log g)'$ **に注意.**

$$D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n = \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \qquad (\log \tau_n)' - (\log \bar{\tau}_n)' = \lambda_1 \frac{\tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1}}{\tau_n \bar{\tau}_n} - \lambda_2$$

$$D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \qquad \longrightarrow \qquad (\log \tau_{n+1})' - (\log \bar{\tau}_n)' = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{\tau_n \bar{\tau}_{n+1}}{\tau_{n+1} \bar{\tau}_n} + \lambda_3$$

(upper)_{n-1} - (lower)_{n-1} :

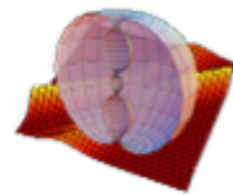
$$\left(\log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \right)' = \lambda_1 \frac{\tau_n \bar{\tau}_{n-2}}{\tau_{n-1} \bar{\tau}_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\tau_{n-1} \bar{\tau}_n}{\tau_n \bar{\tau}_{n-1}} - \lambda_2 + \lambda_3 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\frac{dq_n}{dt} = \lambda_1 e^{-q_n + \bar{q}_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_1} e^{q_n - \bar{q}_n} - \lambda_2 + \lambda_3}$$

(upper)_n - (lower)_{n-1} :

$$\left(\log \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\bar{\tau}_n} \right)' = \lambda_1 \frac{\tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1}}{\tau_n \bar{\tau}_n} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\tau_{n-1} \bar{\tau}_n}{\tau_n \bar{\tau}_{n-1}} - \lambda_2 + \lambda_3 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\frac{d\bar{q}_n}{dt} = \lambda_1 e^{-q_{n+1} + \bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda_1} e^{q_n - \bar{q}_n} - \lambda_2 + \lambda_3}$$

第1章に現れたBTと同じ！

Bäcklund 変換 (4)



DISDDG2014

BT から Lax 形式を得る : **Put** $\bar{\tau}_n = \tau_n \Psi_{n+1} !$

$$D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n = \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \qquad \tau'_n (\tau_n \Psi_{n+1}) - \tau_n (\Psi_{n+1} \tau_n)' = \lambda_1 \tau_{n+1} \tau_{n-1} \Psi_n - \lambda_2 \tau_n^2 \Psi_{n+1}$$

$$D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \qquad \longrightarrow \qquad \tau'_{n+1} (\Psi_{n+1} \tau_n) - \tau_{n+1} (\Psi_{n+1} \tau_n)' = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \tau_{n+1} \Psi_{n+2} + \lambda_3 \tau_{n+1} \tau_n \Psi_{n+1}$$

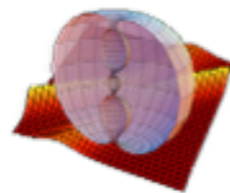
$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad -\Psi'_{n+1} &= \lambda_1 \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2} \Psi_n - \lambda_2 \Psi_{n+1} & \Psi'_n &= -\lambda_1 (1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} + \lambda_2 \Psi_n \\ \longrightarrow \quad -\Psi'_{n+1} + \left(\log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right)' \Psi_{n+1} &= -\frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+2} + \lambda_3 \Psi_{n+1} & \longrightarrow \quad \Psi'_n &= -(I_n + \lambda_3) \Psi_n + \frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad \lambda_1 (1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} - I_n \Psi_n + \frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+1} &= (\lambda_2 + \lambda_3) \Psi_n \\ \Psi'_n &= -\lambda_1 (1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} + \lambda_2 \Psi_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad (1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} + I_n \Psi_n + \Psi_{n+1} &= \lambda \Psi_n \\ \Psi'_n &= (1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} \end{aligned}$$

Lax Form

where $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\lambda$.
or $(-\lambda_1)^n e^{\lambda_2 t} \Psi_n \rightarrow \Psi_n$, $\lambda_3 = -\lambda$.



📌 2次元戸田格子のLax 形式 : $\bar{\tau}_n = \tau_n \Psi_{n+1}$

$$\begin{cases} \partial_y \Psi_n = -\lambda_1(1 + V_{n-1})\Psi_{n-1} + \lambda_2 \Psi_n \\ \partial_x \Psi_n = -(I_n + \lambda_3)\Psi_n + \frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+1} \end{cases} \quad \text{両立条件} \quad \partial_x(\partial_y \Psi_n) = \partial_y(\partial_x \Psi_n) \quad \rightarrow \quad \text{2DTL}$$

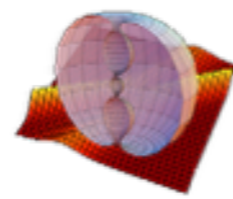
📌 BTの簡約 : 方程式の簡約と同じ

- ✳ IDTL: $t = x+y, s = x-y$ として s 依存性を落とす
- ✳ Sinh-Gordon, Sine-Gordon: 2周期性を課す

Sine-Gordon 方程式のBT (A.V. Bäcklund, 1875)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta - \bar{\theta}}{2} \right)_y &= -2\lambda_1 \sin \frac{\theta + \bar{\theta}}{2} & \theta_{xy} &= -4 \sin \theta \\ \left(\frac{\theta + \bar{\theta}}{2} \right)_x &= -\frac{2}{\lambda_1} \sin \frac{\theta - \bar{\theta}}{2} & \bar{\theta}_{xy} &= -4 \sin \bar{\theta} \end{aligned} \quad \longrightarrow$$

負の定曲率曲面の変換を記述する



離散可積分系入門 (筧)

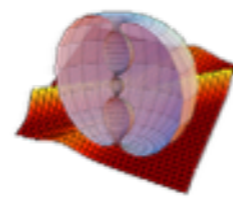
チュートリアルの基本講義第2弾. 解の構造を保ったまま (可積分性を保ったまま) 微分方程式を差分方程式に拡張する手法 (可積分系の離散化) を講義します.

可積分系の厳密解とGram行列式(太田)

可積分系を応用する際に, 例えば Sinh-Gordon 方程式から Sine-Gordon 方程式を得るときのように解に純虚数であることを要請したり, ある変数と別の変数が複素共役であるという条件を課したり, または空間に対称性を入れたりすることが必要な場合があります. しかし, そのような場合に解を具体的に作ることはしばしば容易ではありません. そのようなとき, Casorati 行列式でなく, 解のGram行列式表示を用いると便利です. この講義では Gram 行列式の技法の入門を行います.

平面曲線の離散微分幾何 (松浦)

本格的な離散微分幾何の入門として, まずは取り扱いやすい平面曲線の幾何とその離散化を議論します. (modified) Korteweg-de Vries 方程式などの可積分系の基本方程式が自然に現れる様子と, 離散可積分系とうまく整合性の取れた幾何の枠組みが講義されます.



可積分系のテータ関数解 (中屋敷)

可積分系においてソリトン解と同様に重要な解のクラスにテータ関数で表示される「準周期解」と呼ばれるクラスの解があり、周期的な解や、閉曲線や閉曲面を記述します。この講義では準周期解を扱う上での基本的な事項を取り扱います。

可積分幾何入門 (井ノ口)

本チュートリアルの中核講義の一つです。離散微分幾何の離散曲面論を議論するには、可積分構造を持った曲面を理解する必要があります。例えば平均曲率曲面や負の定曲率曲面でsinh-Gordon 方程式や sine-Gordon 方程式が重要な役割を果たします。この講義ではそのような曲面の基礎理論を取り扱います。

離散可積分曲面論入門 (小林)

離散微分幾何の日本における期待の若手研究者によるチュートリアルの中核講義で、離散曲面論の入門を行います。可積分系の理論と微分幾何のコラボレーションを楽しみ、将来の応用の可能性を想像してみてください。